4° aftr. U. 33, -1

F

<36604530220015

<36604530220015

Bayer. Staatsbibliothek

Astr. Un.

p. 714.

(fr. Z.) Schubert theoret. Astron. mit Kupf.
Bd 1.2.3. Petersb. 1798. 4°

Erläuterungen und Zusätze

zu dem dritten Theile

von

Herrn Schuberts theoretischer

Astronomie

nemlich zu dessen

physischer Astronomie,

nebst einem angehängten Auszuge aus diesem Werke und den Zusätzen, worin der Geist der Rechnung strenge beobachtet ist.

Zum fasslichen Selbstunterrichte und zu einem leichten Ueberblicke.

Verfasst vom

Grafen G. von Buquoy.

Erste Hälfte,

welche inclusive bis zum §. 140. reicht.

Leipzig,

bei Breitkopf und Härtel.

1811.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Ich darf mir schmeicheln, mit diesen Erläuterungen und Zusätzen jedem in der höhern Analyse und den ersten Grundsätzen der Dynamik einigermaassen Unterrichteten, die Mittel darzubiethen, durch blosses eigenes Nachdenken, ohne allen mündlichen Nebenunterricht in den Geist des in des Herrn Schuberts so vortrefflich zusammengestellter physischer Astronomie Gesagten vollkommen eindringen zu können, wozu doch schon eine ziemliche Fertigkeit in Berechnung höherer dynamischer Aufgaben erfordert wird.

Ich habe mich beflissen jede in diesem Werke nur einigermaassen undeutliche oder auf eine unbestimmte Art ausgedrückte Stelle *) auf

*) Anmerkung. Herr Schubert möge die Ausdrücke Undeutlich und Unbestimmt ja nicht als einen Vorwurf annehmen, da diese Ausdrücke nur in so ferne Statt finden können, als von solchen Lesern die Rede ist, welche nicht selbst im Stande sind, den Sinn des jedesmal Gesagten aus dem Geiste der Rechnung zu folgern.

das Deutlichste und Bestimmteste zu erläutern, und dabei allemal zu zeigen, dass der Verfasser die Sache gerade so und nicht anders gemeint haben müsse, da dieses aus den Bedingnissen und dem Gange der vorhergegangenen Rechnung so und nicht anders folge. Ich habe bei jeder nur einigermaassen kurz geführten Rechnung jene Zwischenformeln eingeschoben, welche dem Schüler nothwendig, hingegen dem geübten Rechner eine unnütze Weitläuftigkeit sind. Ich habe am Ende des zweiten Kapitels I. Abschnitt das Wichtigste aus den Theorien des Pendels, des Schwerpunkts und der Trägheitsmomente darum angeführt, weil ich eine genaue Kenntniss dieser Lehren als etwas unumgänglich Nothwendiges und vielleicht nicht bei allen meinen Lesern Vorauszusetzendes erachtete. Endlich habe ich den eigentlichen Erläuterungen und Zusätzen zu des Herrn Schuberts physischer Astronomie den Geist der Differenzial-Integral- und Variationsrechnung vorangeschickt, da ich fand, dass dieser so wichtige und fruchtbare Gegenstand der reinen Mathematik von den Meisten mit zu wenig philosophischem Eindringen betrieben wird. Die Art der Zusammenstellung der Grundsätze der Differenzial- Integral- und Variationsrechnung enthält manches Eigene, und möchte wohl auch dem gelehrten Mathematiker einiges Interesse einflössen.

Ich liefere einstweilen die erste Hälfte meiner Arbeit, und werde mit der zweiten nicht lange säumen, wenn ich glücklich genug bin schon jetzt einigen Zuspruch zu erhalten.

Am Ende der Erläuterungen und Zusätze folgt ein gedrängter Auszug des Ganzen, worinn alle (für den blossen Denker) unnütze Zwischenworte ausgelassen, und bloss jene Worte angesetzt sind, durch welche man sich zu denken genöthigt fühlt. Dieser Auszug enthält nicht etwa blosse Resultate, sondern allemal den Geist der Rechnung so genau, dass Jeder, der sich die Mühe geben will, allemal daraus die Rechnung selbst weiter auseinander sezzen kann.

Wenn ich die Kapitel 6 und 7 des vierten Abschnitts nur sehr kurz behandelt habe, so geschah diess darum, da ersteres eine blosse Anwendung des Kapitels 4 im IV. Abschnitt, und letzteres ein in die Hydrostatik gehöriger Gegenstand ist, der in mehreren Schriften (als *Bossüt* Hydrodynamik) sehr fasslich vorgetragen ist. Mit desto grösserm Fleisse habe ich das sehr wichtige und schwere vierte Kapitel des IV. Abschnitts behandelt, wobei es wichtig war zu zeigen, dass die Formeln I. II. III. (Seite 121 u. 125.) zu grossen Irrthümern führen könnten, wenn sie allgemein und gerade hin angewendet würden, und dass die Richtigkeit der daraus auf die Bewegung des

Monds und der Erde hergeleiteten Sätze blos dem Umstande zu danken sey, dass in diesen einzelnen Fällen $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$ wird.

Alle meine Erläuterungen beziehen sich auf die Seiten und die von oben herab gezählten Zeilen des dritten Theils von Schuberts theoretischer Astronomie, Edition Petersburg 1798.

Geist
der Differenzial- Integral- und Variationsrechnung.

F (x, y, z,) bedeutet eine solche veränderliche Grösse, welche von den veränderlichen Grössen x, y, z, dergestalt abhängt, mit selbigen dergestalt nach einem steten Gesetze verändert wird, dass es einen algebraischen Ausdruck gibt, wodurch allgemein für jedes x, y, und z die diesem entsprechende F (x, y, z) ausgedrückt wird.

In einer solchen F (x, y, z,) besteht zwischen x, y, z eine Relation, irgend eine Gleichung, oder nicht; im ersten Fall wächst y und z um bestimmte Inkremente Δy, Δz, wenn x um ein bestimmtes Inkrement Δx wächst, im letzten Falle hingegen können x, y, z um die beliebigen Inkremente Δx, Δy, Δz wachsen.

In dem einen oder dem andern Falle heisst Δ F (x, y, z) jenes Inkrementum, worum F (x, y, z) dadurch wächst, dass darinn x um Δx, y um Δy, z um Δz wachsen. Jene Operation nun, in jeder F (x, y, z) den algebraischen Ausdruck zu finden von Δ F (x, y, z), heisst endliche Differenzirung, *) und besteht im Allgemeinen darinn, in jeder vorkommenden F (x, y, z) die veränderlichen Grössen x, y, z um Δx, Δy, Δz wachsen zu lassen, und von dieser solchergestalt veränderten Funktion abzuziehen F (x, y, z), wo dann der erhaltene Rest = Δ F (x, y, z). Lässt man in einer solchen F (x, y, z,) die veränderlichen Grössen x, y, z statt um die zusammengehörigen endlichen Inkremente Δx, Δy, Δz um die zusammengehörigen Null-Inkremente dx, dy, dz von derselben Kategorie als Δx, Δy, Δz wachsen (wo dx, dy, dz, wenn zwischen x, y, z keine Gleichung besteht, Nullen mit beliebigen Koeffizienten, hingegen Nullen mit bestimmten Koeffizienten sind, wenn in dx der Koeffizient der Nulle bestimmt ist, und wenn zwischen x, y, z eine bestimmte Gleichung besteht], so wächst F (x, y, z) zwar um Null, aber nicht um eine beliebige

*) Anmerkung. Die endliche Differenzirung ist eine Operation der Differenzrechnung überhaupt, welche letztere allgemein die Methode in sich begreift, in dem jedesmaligen Falle zusammengehörige endliche Inkremente in eine Gleichung zu bringen, und mit einer solchergestalt erhaltenen Gleichung nach den gewöhnlichen algebraischen Regeln zu verfahren.

Nulle, sondern um Produkte aus endlichen Koeffizienten in eine jedesmalige absolute Nulle, welches Inkrementum Null durch d F (x, y, z) bezeichnet wird. Die Operation, mittelst welcher man den algebraischen Ausdruck von d F (x, y, z) findet, heisst Differenzirung, und ist eine Operation der Differenzialrechnung, welche letztere die allgemeine Methode in sich begreift, die im jedesmaligen Falle zusammengehörigen Null-Inkremente in eine Differenzialgleichung dann nach den gewöhnlichen algebraischen Regeln eben so vorzulegen, als ob die in dieser Differenzialgleichung enthaltenen Differenzialausdrücke endliche Grössen wären, welches z. B. bei der zwar richtigen Gleichung b. o + c. o = o nicht anginge, da hier z. B. $\frac{b.\ o}{o} = \frac{c.\ o}{o} + o$ nicht wahr wäre; soll aber eine besagtermassen mit Nullen verwebte Gleichung den gewöhnlichen algebraischen Operationen eben so unterliegen, als ob diese Nullen endliche Grössen wären: so kann diess nur dann Statt finden, wenn eine solche Gleichung eine dem jedesmaligen Falle entsprechende Differenzialgleichung ist, welche anzusetzen das Geschäft der Differenzialrechnung ist. Dies folgt hieraus. Eine in dem jedesmaligen Falle zwischen den zusammengehörigen Null-Inkrementen angesetzte Gleichung ist nur dann eine diesem Falle entsprechende Differenzialgleichung, wenn diese Gleichung daraus hergeleitet worden, dass man in demselben Falle zwischen den zusammengehörigen endlichen Inkrementen die zusammengehörigen Nullinkremente von derselben Kathegorie substituirt hat. Findet z. B. in irgend einem Falle zwischen den zusammengehörigen endlichen Inkrementen Δx, Δy, die Gleichung Statt $a \Delta x + b \Delta y - c \Delta x \Delta y = o$, und es sind dx, dy zusammengehörige Null-Inkremente von derselben Kategorie als Δx, Δy: so ist in demselben auch die Gleichung wahr $adx + bdy - cdxdy = o$ oder $adx + bdy = o$, aus welcher Differenzialgleichung z. B. folgt, $\frac{adx}{dy} + \frac{bdy}{dy} = o$ [da doch aus der willkührlich angesetzten Gleichung $a.o + b.o = o$ nicht folgt $\frac{a.o}{o} + \frac{b.o}{o} = o$]; dass aber aus dieser Differenzialgleichung besagtermassen geschlossen werden könne, ergiebt sich daraus. Es ist im besagten Falle $a\Delta x + b\Delta y - c\Delta x\Delta y = o$, daher auch in diesem Falle $\frac{a\Delta x}{\Delta y} + \frac{b\Delta y}{\Delta y} - \frac{c\Delta x\Delta y}{\Delta y} = o$ eine richtige Gleichung ist, und zwar in so ferne richtig bleibt, als in selbe was immer für zusammengehörige In-

kremente von derselben Kategorie als Δx und Δy substituirt werden, folglich auch dann noch richtig bleibt, wenn statt Δx, Δy substituirt wird dx, dy, daher in diesem Falle die Gleichung richtig:

$$\frac{adx}{dy}+\frac{bdy}{dy}-\frac{cdxdy}{dy}=0 \text{ oder } \frac{adx}{dy}+\frac{bdy}{dy}=0.$$

Es beruht demnach allgemein jede Operation der Differenzialrechnung darauf: Man setze die in dem gegebenen Falle zwischen den zusammengehörigen endlichen Inkrementen [von derselben Kategorie als die jedesmaligen zusammengehörigen Null-Inkremente, von denen jedesmal die Rede ist] aus den Bedingungen der Aufgabe Statt findende Gleichung an, und substituire dann in diese Gleichung statt der zusammengehörigen endlichen Inkremente die zusammengehörigen Null-Inkremente von derselben Kategorie, so ist die dadurch erhaltene Gleichung, welche oft einer merklichen Abkürzung fähig seyn kann, die diesem Falle zwischen besagten Null-Inkrementen entsprechende Differenzialgleichung, aus welcher alles eben so gefolgert werden kann, als ob besagte Null-Inkremente endliche Grössen wären. Eine F (x, y, z) differenziren heisst den algebraischen Ausdruck des Differenzials von F (x, y, z) durch was immer für eine Methode finden. Das Differenzial von F (x, y, z) ist jenes Inkrementum, worum F (x, y, z) dadurch wächst, dass x, y, z um dx, dy, dz wachsen. Daher gibt es zweierlei Wege F (x, y, z) zu differenziren. 1) Die algebraische Differenzirung, wenn der algebraische Ausdruck von F (x, y, z) bekannt ist, wo man dann blos x, y, z um Δx, Δy, Δz vermehren, und von $F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ abziehen darf F (x, y, z) und diesen Rest statt Δx, Δy, Δz setzen darf dx, dy, dz, wo der erhaltene Ausdruck $= d\,F(x, y, z)$. 2) Die nicht algebraische Differenzirung, wenn der algebraische Ausdruck von F (x, y, z) nicht bekannt ist, man aber aus den Bedingnissen der Aufgabe [geometrisch, statisch, mechanisch, optisch u. s. w.] den algebraischen Ausdruck jenes Inkrementums anzusetzen im Stande ist, worum F (x, y, z) dadurch wächst, dass x um Δx, y um Δy, z um Δz wachsen, in welchen Ausdruck man statt Δx, Δy, Δz setzt dx, dy, dz. Hierauf beruht eigentlich die Möglichkeit der Auflösung der durch Anwendung der Integralrechnung [entweder blos für sich allein, oder zugleich mit andern algebraischen Operationen verbunden] auflösbaren Aufgabe.

Die Integralrechnung [blos als Rechnungsmethode betrachtet] ist im Grunde nichts anders als jene algebraische Operation, mittelst welcher man bei dem gegebenen Ausdrucke des Differenzials einer Funktion den algebraischen Ausdruck dieser Funktion

selbst findet, nemlich jenen algebraischen Ausdruck, welcher durch algebraische Differenzirung differenzirt den vorgelegten algebraischen Ausdruck gibt.

Ehe ein Weiteres über jene Fälle gesagt wird, in welchen unmittelbar oder mittelbar durch Integralrechnung operirt wird, werde noch folgendes angemerkt: Ist $y = f(x)$, und ist dx eine Nulle mit einem beständigen Koeffizienten, z. B. $= m.o.$ so ist dy oder $df(x) = f(x+dx) - f(x) = f(x)dx$ oder $= f(x)m.o.$ Ist in $f(x)$ das x, mit lauter ganzen Exponenten enthalten, ferner n der höchste Exponent von x, so ist $df(x) = f(x)m.o$, $d^2f(x) = f^*(x)m.^2o^2$, $d^3f(x) = f^{**}(x)m.^3o^3$, ... $d^nf(x) = f^{***\cdots}(x^0)\ m.^no^n =.$ C. $o^n =$ dem Produkte aus einer beständigen Grösse in n Nullen, und $d^{n+1}f(x) = \frac{o}{x}.o^{n+1}$ gleich dem Produkte aus Null in $n+1$ Nullen.

In $F(x, y, z) = v$ heisst *partial* Differenzial von v blos in Bezug auf x jedes Inkrementum, worum v wächst, wenn darinn blos x um dx zunimmt, hingegen y und z als beständige Grössen betrachtet werden. Dies wird so bezeichnet $dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$.

Es sey z. B. $v = ax^2 + by^3 + cy^4$ so ist $\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = 2axdx$, und da ist der Satz zu merken:

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)dz.$$

Diese Partialbrüche verwechsle man aber nicht mit jenen

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)dx\ \left(\frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)dx}{dy}\right)dy,\ \left(\frac{d\left(\frac{d\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)dx\right)}{dy}\right)dy}{dz}\right)dz,$$

woselbst erstlich v blos in Bezug auf x differenzirt wird, ferner das dadurch erhaltene Partialdifferenzial blos in Bezug auf y differenzirt wird, endlich das hiedurch erhaltene Partialdifferenzial blos in Bezug auf z differenzirt wird.

Wenn aus der Bedingniss einer Aufgabe eine Funktion gleich einer beständigen Grösse C ist, so ist in derselben Aufgabe deren Differenzial $= o$, daher umgekehrt, wenn in einer Aufgabe irgend ein Differenzialausdruck $= o$, so ist deren Integral in derselben Aufgabe = einer beständigen Grösse; denn sey z. B. $ax + by^2 = C$ so ist auch $a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y)^2 = C$ oder $ax + a\Delta x + by^2 + 2by\Delta y + b\Delta y^2 = C$, daher auch

$a\Delta x + 2by\Delta y + b\Delta y^2 = o$, und eben so $adx + 2bydy + bdy^2 = o$ oder $adx + 2bydy = o$ oder $d(ax + by^2) = o$.......

Ein $= o$ gesetzter Differenzialausdruck ist nie deshalb $= o$, weil in jedem Gliede irgend ein d enthalten ist, sondern wäre auch dann noch Null, wenn die in einem solchen Ausdrucke enthaltenen Differenzialen dx, dy, dz zusammengehörige endliche Differenzen Δx, Δy, Δz wären, wo dann dieser endliche Differenzen-Ausdruck vom vorgelegten Differenzialausdruck blos darinn verschieden wäre, dass im erstern noch alle jene Glieder enthalten wären, welche in letzterm wegfallen, die aber auch stehen bleiben könnten. Da nun eine solche Differenzfunktion allemal $= o$ bleibt, man mag wie immer oft durch Δx, Δy oder Δz dividiren: so gilt dies auch von der $= o$ gesetzten Differenzialfunktion in Bezug auf dx, dy, dz......

Man kann eine f (x, y) von jedem beliebigen Punkte zu zählen anfangen, welches einmal festgesetzt, jenes Stück von f (x, y) bestimmt, das z. B. $x = a$ und $y = b$ entspricht, wie z. B. hier ABOD (Taf. I. Fig. 1.). Hier heisst α und β das x und y im Anfangspunkte, nemlich jene Werthe von x und y, welche jenem Punkte B entsprechen, von an F (xy) gemessen wird, wo also F (xy) dem α und β entsprechen oder $F(\alpha, \beta) = o$; hingegen a und b das x und y im Endpunkte. Das Integral einer Differenzialfunktion von x und y ist allemal eine Funktion von x und y, worinn die Konstante schon bestimmt ist, wenn nach Integrirung dieser Differenzialfunktion jedem Gliede [im gefundenen Integral] mit verkehrtem Zeichen ein gleiches Glied beigesetzt wird, worin aber statt x und y [welches die x und y im Endpunkte bedeutet] α und β substituirt werden; hätte man z. B. durch Integrirung gefunden $gxy + mx - cy^2$, so wäre mit Bestimmung der Konstante $gxy - gx\beta + mx - m\alpha - cy^2 + c\beta^2$, also das dem $x = a$ und $y = b$ entsprechende Stück $= g.a.b - g\alpha\beta + ma - m\alpha - cb^2 + c\beta^2$.

Kommt es darauf an, den algebraischen Ausdruck von f(x) zu bestimmen, so ist man dieses im Stande, wenn man aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck f von df(x) ansetzen und diesen Differenzialausdruck integriren kann; denn dann ist dieses gefundene Integral der gesuchte algebraische Ausdruck, wenn nebstbei die darin befindliche Konstante aus den Bedingnissen der Aufgabe bestimmt worden. Dieses ist darum wahr: Wenn einerlei Differenzial, werde es auch auf verschiedenerlei Wegen gesucht, zwei Funktionen zukömmt, so sind diese zwei Funktionen eine und dieselbe von einander in nichts verschiedene Funktionen. Ist z. B. f(x)dx das Differenzial einer Fläche, und ist zugleich $f(x)dx = d\,F(x)$, so ist diese Fläche $= F(x)$ Ist der algebraische Ausdruck einer F (x, y, z) zu finden, so setze

man aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck von dF (x, y, z) an, so ist wie vorhin dessen Integrale mit bestimmten Konstanten der gesuchte algebraische Ausdruck. Es kann aber auch der hier gesuchte algebraische Ausdruck so gefunden werden: Setze aus den Bedingnissen der Aufgabe den algebraischen Ausdruck jenes Inkrementums an, worum F (x, y, z) dadurch wächst, dass einmal nur x um dx, in dem dadurch erhaltenen Differenzial blos y um dy, und in dem hierdurch erhaltenen Partialdifferenzial blos z um dz wächst; ist der algebraische Ausdruck blos dieses letzten Inkrementen-Inkrementums gefunden, so integrire selbigen blos in Bezug auf z [d. h. betrachte blos z als veränderlich beim integriren], in welchem gefundenen Integral also die Konstante eine Funktion von x und y seyn kann f(x, y), weil x und y bei diesem Integriren beständige Grössen waren, und bestimme diese Funktion von x und y aus den Bedingnissen der Aufgabe, welches leicht geschieht, wenn man erwäget, was eigentlich ein gleich Null gesetzter Differenzialausdruck heisst. [Man bestimmt nemlich die Konstante f(x, y) hier wieder ganz auf dieselbe Art, als ob keine Differenzialien in dem gefundenen Integrale wären, man setzt nemlich dies ganze Integrale sammt der Konstante f(x, y) für jenen Werth von $z = o$, wo aus den Bedingnissen der Aufgabe dieser Ausdruck würklich zu Null würde, wenn auch die Differenzialen zusammengehörige Differenzen wären]. Ist dieses geschehen, so integrire man den erhaltenen Ausdruck blos in Bezug auf y, wo dann das erhaltene Integrale eine Funktion von x und z als Konstante erhalten kann, welche wieder auf ähnliche Art wie vorhin bestimmt wird; ist dieses geschehen, so integrire man den letztbestimmten Ausdruck blos in Bezug auf x, wo dann das gefundene Integrale keine Differenzialen mehr enthält, und als Konstante eine Funktion von y und z erhalten kann, welche wie vorher bestimmt wird; ist dieses geschehen, so ist der letzt gefundene Ausdruck der hier gesuchte algebraische Ausdruck. Dass dieses in jedem Falle seyn müsse, folgt daraus; dass wenn man was immer für einen algebraischen Ausdruck von x, y, z algebraisch differenzirt blos in Bezug auf x, das dadurch erhaltene Partialdifferenzial algebraisch differenzirt blos in Bezug auf y, und das dadurch erhaltene Partialdifferenzial algebraisch differenzirt blos in Bezug auf z, und auf vorerwähnte Art 3mal zurück integrirt: man allgemein wieder auf den ersten Ausdruck gerathen muss. Andrerseits muss aber der algebraische Ausdruck des letzten Inkrementen-Inkrementums ganz derselbe seyn, werde selbiger durch algebraische Differenzirungen oder durch nicht algebraische Differenzirungen erhalten. Auch kann man sich in jedem einzelnen Beispiele leicht überzeugen, dass

man auf denselben algebraischen Ausdruck geräth, ob man die dreierlei vorbesagten Integrirungen, nach vorbesagter Ordnung in Bezug auf z, y, x, oder nach einer andern Ordnung vornimmt, z. B. in Bezug auf x, y, z.....

Soll die für einen bestimmten Fall zwischen x und y statt habende Gleichung gefunden werden, so setze die zwischen dx und dy aus den Bedingnissen der Aufgabe Statt habende Gleichung an, integrire rechts und links ohne Rücksicht auf Konstante und addire auf einer Seite der Gleichung die Konstante, welche aus den Bedingnissen der Aufgabe zu bestimmen; diess, wenn dx und dy durchaus blos als erste Potenzen vorkommen. Kommen höhere ganze Potenzen von dx und dy vor, so löse eine solche auf Null reduzirte Differenzialgleichung in ihre einfachen Gleichungen auf, wo dann aus jeder solchen Gleichung nach vorerwähnter Art die zwischen x und y Statt habende Gleichung gefunden wird, wo in jeder solchen Gleichung die Konstante eigends bestimmt werden muss, und wo man dann alle diese auf Null reduzirten m Gleichungen auf eine einzige auf Null reduzirte höhere Gleichung reduziren kann. Weit bequemer findet man aber aus einer solchen Differenzialgleichung mit höherm ganzen Exponenten die zwischen x und y Statt findende Gleichung durch bestimmte Substitutionen, wodurch man so lange von einer gleichgeltenden Gleichung in die andere übergeht mit Anwendung der Integralrechnung und gewisser algebraischer Vortheile, bis man endlich auf die unter denselben Bedingnissen (als die zwischen dx und dy Statt habende Gleichung Statt findet) Statt findende Gleichung gelangt.

Ist die zwischen dx und dy aus den Bedingnissen der Aufgabe Statt findende Gleichung von der Art, dass darinn höhere Differenzialen vorkommen, z. B. $d^m y$...., und es ist $d^m y$ darinn das höchste Differenzial, so kann man durch m maliges zurückintegriren auf die zwischen x und y unter den Bedingnissen der Aufgabe Statt findende Gleichung gelangen, wovon die Ursache leicht einzusehen. (Es ist aber bei diesem Integriren wohl zu merken, dass man, so lange als noch in der zu integrirenden Differenzialgleichung höhere Differenzialien vorkommen, zu dem gefundenen Integral das Produkt aus einer beständigen Grösse und dem als beständig angenommenen Differenzial mit seiner gehörigen Potenz hinzu addiren müsse; denn es ist bekannt, dass nach der ersten Differenzirung die beständigen, nach der zweiten aber auch schon jene Grössen hinwegfallen die selbst beständig sind, und das als beständig angenommene Differenzial zum Koeffizienten haben; dasselbe geschieht beim dritten Differenziren u. s. w.) Weit bequemer bedient man sich aber in solchen Fällen gewisser Substitutionen, wo man wieder auf ähnliche Art wie vorhin auf die zwischen

x und y unter den Bedingnissen der Aufgabe Statt findende Gleichung gelangt. Kommen in einer solchen Differenzialgleichung überdiess noch höhere Potenzen von $d^m y$..... vor, z. B. $(d^m y)^n$..... so löse eine solche auf Null reduzirte Differenzialgleichung in ihre einfachen Differenzialgleichungen auf, und suche aus jeglicher derselben die zwischen x und y Statt findende Gleichung nach vorerwähnter Methode, wo dann alle diese zwischen x und y Statt findenden Gleichungen durch eine einzige auf Null reduzirte höhere Gleichung ausgedrückt werden können; aber auch in diesen Fällen gibt e gewisse Substitutionen, mittelst welcher man auf ähnliche Arten wie vorhin auf die zwischen x und y stattfindende Gleichung gelangt. Bei diesen höheren Differenzialgleichungen gibt Euler einen auch sehr anwendbaren Rechnungsvortheil an, nämlich eine gewisse Substitution, mittelst welcher man aus der zwischen den höhern Differenzialien Statt findenden Gleichung, wobei man dx als beständiges, und dy als veränderliches Inkrementum angenommen, unmittelbar jene höhere Differenzialgleichung findet, welche man gefunden hätte, wenn man vom Anfange der Auflösung der Aufgabe an, dx und dy als veränderlich betrachtet hätte, woraus es dann leicht ist, jene höhere Differenzialgleichung zu finden welche man dann erhalten hätte, wenn man vom besagten Anfange an dx als veränderlich und dy als beständig angenommen hätte, indem man blos jene Glieder auszulassen hat, worinn höhere Differenzialien von y vorkommen. Dieser Rechnungsvortheil ist darum sehr wichtig, weil man oft nur dadurch leicht auf eine höhere Differenzialgleichung gelangt, dass man dx als beständig, und dy als veränderlich betrachtet, dass es aber zugleich oft sehr schwer fällt, aus einer solchen höhern Differenzialgleichung die zwischen x und y Statt habende Gleichung zu finden, und dieses oft weit leichter aus jener höhern Differenzialgleichung gefunden würde, welche höhere Differenzialgleichung man dann gefunden hätte, wenn man von besagtem Anfange an, dy als beständig, und dx als veränderlich betrachtet hätte. Kann man aber durch die auf eine oder die andere Art erhaltene höhere Differenzialgleichung auf die zwischen x und y Statt findende Gleichung kommen, so gibt besagte Methode ein sehr bequemes Mittel ab, um zu sehen, ob irgend eine solche Aufgabe einer bestimmten Auflösung fähig ist, welches in jenen Fällen nicht wäre, wo man aus den zweierlei höheren Differenzialgleichungen nicht auf eine und dieselbe Gleichung zwischen x und y durch übrigens richtige Operation käme, da in einer Aufgabe verschiedenerlei richtige Methoden nur auf einerlei Resultate führen können, wenn die Aufgabe von der Art ist, dass sie einer bestimmten Auflösung fähig ist.

Enthält eine Funktion von x und y kein angezeigtes Integral, und es wird gefragt, bei welchen Werthen von x eine solche Funktion zu einem *max.* oder *min.* werde, so kann die Antwort allemal nur dahin ausfallen: bei diesen oder jenen bestimmten Werthen von x; dann wird also nie der Lauf einer Kurven, sondern allemal werden nur einzelne Punkte einer bestehenden Kurven bestimmt. Fragen solcher Art gehören in das Gebiet der Differenzialrechnung, und sind nach der bekannten Taylor'schen Formel leicht aufzulösen *).

*) Bei dieser Taylor'schen Formel ist zu merken: Bestehe F (x, y), worin x und y mit einander in gar keiner Relation stehen, so dass bei unverändertem y wie wenn $y = a$ wäre, das x um $\pm \Delta x$, und umgekehrt bei unverändertem x, wie wenn $x = b$ wäre, das y um $\pm \Delta y$ wachsen kann; d. i. $F(x \pm \Delta x, y) = F(xy) \pm \frac{dF(xy)\Delta x}{dx} + \frac{d^2F(xy)\Delta x^2}{2dx} + \frac{d^3F(xy)\Delta x^3}{2.3.dx^3} + + \ldots\ldots$ alles blos in Bezug auf x differenzirt. Es ist also F (x, y) blos in Bezug auf die Veränderlichkeit von x ein *max.*, wenn $x = f(y)$, oder $= f^+(y)$ oder $= f^{++}(y)$, vorausgesetzt, dass bei diesen Werthen von x entsteht $dF\left(\frac{xy}{dx}\right) = o$ und zugleich $d^2\frac{F(xy)}{2dx^2} = -$; ein *min.* hingegen wird u. s. w...... Eben so ist $F(x, y \pm \Delta y) = F(x, y) \pm \frac{dF(x, y)\Delta y}{dy} + + \frac{d^2F(xy)\Delta y^2}{2dy^2} \pm \frac{d^3F(xy)\Delta y^3}{2.3.dy^3} + \ldots\ldots$, alles blos in Bezug auf y differenzirt. Also ist F (x, y) blos in Bezug auf die Veränderlichkeit von y ein *max.*, wenn $y = F(x)$ oder $= F^+(x)$, vorausgesetzt, dass bei diesen Werthen von y entsteht $dF\frac{(xy)}{dy} = o$ und zugleich $d^2\frac{F(xy)}{2dy^2}$ $-$; ein *min.* hingegen wird Es wird also F (x y), die Veränderlichkeit von x und y zu gleicher Zeit berücksichtigt, ein *max.* bei folgenden für x und y zugleich Statt findenden Werthen: $x = f(F(x))$ und $y = F(f(y))$, dann $x = f^+(F^+(x))$ und $y = F^+(f^+(y))$, dann $x = f(F^+(x))$ und $y = F(f^+(y))$, dann $x = f^+(F^{++}(x))$, und $y = F(f^{++}(y))$, dann..... woraus sich sowohl für x als y deren beständige Werthe finden lassen, welche allemal zugleich Statt finden müssen. Ist hingegen f (x y) von der Natur, dass zwischen x und y eine Relation Statt findet, so dass wenn x um $\pm \Delta x$ wächst, auch y um $\pm \Delta y$ oder um $\mp \Delta y$ wachsen muss; so ist $f(x \pm \Delta x, y)$ schon *eo ipso* $= f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$, und eben so $f(x, y \pm \Delta y) = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$ und da ist denn $f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$, [welches auch heissen könnte $f(x \pm \Delta x, y \mp \Delta y)] = f(xy) \pm \frac{df(xy)\Delta x}{dx} + \frac{d^2f(xy)\Delta x^2}{2dx^2} \pm \frac{d^3f(xy)\Delta x^3}{2.3.dx^3} + \ldots\ldots$, oder es ist eben so $f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y)$, [welches auch heissen könnte $f(x \mp \Delta x, y \pm \Delta y)] = f(xy) \pm$

Enthält hingegen eine Funktion von x und y ein angezeigtes Integral worin die Gleichung zwischen x und y noch willkürlich, so ist sie ein summarischer auch für ein angenommenes x noch unbestimmter Ausdruck, welcher eigentlich von dem ganzen Laufe einer Kurven abhängt, oder von jener Gleichung zwischen Absoisse x und Ordinate y, wodurch der Lauf einer Kurven bestimmt wird. Frägt man also in einem solchen Falle, wann $\int \ldots\ldots$ zu einem *max.* oder *min.* werde, so kann die Antwort nie dahin ausfallen, bei diesen oder jenen Werthen von x, sondern allemal nur dahin: bei dieser oder jener Gleichung zwischen x und y, wornach die Kurve konstruirt [worauf sich die jedesmalige Aufgabe bezieht] $\int \ldots\ldots$ zu einem *max.* oder *min.* wird. Fragen dieser Art gehören in das Gebiet der Variationsrechnung, welche eigentlich nichts anders ist, als eine Differenzirung von $\int \ldots\ldots$ in einer andern Beziehung als die hinter dem Integralzeichen stehende Funktion differenzirt ist, weshalb man sich beim Variren des Zeichens δ bedient. Man kann also sagen: Differenziren heisst mit dem Zeichen d, hingegen variren mit dem Zeichen δ differenziren. Differenzirt werden Funktionen ohne Integralzeichen, hingegen varirt nur angezeigte Integral-Funktionen, worin die Gleichung zwischen x und y noch ganz willkürlich ist. Die andere Beziehung beim Variren von $\int \ldots\ldots$ als beim Differenziren von der hinter dem Integralzeichen stehenden Funktion besteht darin, dass beim Variren eine Veränderlichkeit der Gleichung zwischen x und y angenommen wird, hingegen beim Differenziren blos eine Veränderlichkeit der Wurzeln x, y der Funktion von und y.

Man begreift leicht, dass $\delta\, d\,(\) = d\,\delta\,(\)$ und $\delta \int (\ldots) = \int \delta\,(\ldots)$. Heisse hier Δx und Δy endliche Variation von x und y, so folgt aus der Taylor'schen For-

$\pm \frac{df(xy)\Delta y}{dy} + \frac{d^2f(xy)\Delta y^2}{2\,dy^2} \pm \frac{d^3f(xy)\Delta y^3}{2.3\,dy^3} + \ldots\ldots$, in welchen beiden Taylor'schen Formeln, sowohl in Bezug auf x als in Bezug auf y differenzirt ist. Es ist also in diesem Falle f(xy) ein *max.* wenn $\frac{df(xy)}{dx} = 0$, und zugleich $\frac{d^2f(xy)}{2\,dx^2} = -$ oder wenn $\frac{df(xy)}{dy} = 0$, und zugleich $\frac{d^2f(xy)}{2\,dy^2} = -$, woraus z. B. x die Werthe erhalte: $= f(y)$ oder $= f^{+}(y)$, oder $= f^{++}(y)$, da aber eine Gleichung zwischen x und y besteht, woraus $y = \overline{f}\,(x)$ gefunden werden kann, so ist f (x y) ein *max.* bei folgenden Werthen von x:

$$x = f\,(\overline{f}\,(x)) \text{ oder } = f^{+}\,(\overline{f}\,(x)) \text{ oder } = f^{++}\,(\overline{f}\,(x));$$

woraus man finden kann z. B. $x = \alpha$ oder $= \beta$ oder $= \gamma$.

mel, dass wenn in $\int(\ldots\ldots)$ das x um $\pm \Delta x$ wächst, die Integralfunktion zu folgender wird:

$$\int(\ldots\ldots) \pm \delta\int(\)\ \frac{\Delta x}{\delta x} + \delta^2\int(\)\ \frac{\Delta x^2}{2.\delta x^2} \pm \delta^3\int(\)\ \frac{\Delta x^3}{2.3.\delta x^3} + \ldots,$$

oder wenn in $\int(\)$ das y um $\pm \Delta y$ wächst, die dem $y + \Delta y$ entsprechende Integralfunktion zu folgender wird:

$$\int(\) \pm \delta\int(\)\ \frac{\Delta y}{\delta y} + \delta^2\int(\)\ \frac{\Delta y^2}{2\delta y^2} \pm \delta^3\int(\)\ \frac{\Delta y^3}{2.3.\delta y^3} + \ldots;$$

es wird also $\int(\)$ dann ein *max.* oder *min.* seyn, wenn zwischen x und y entweder eine solche Gleichung besteht, dass $\frac{\delta\int(\)}{\delta x} = o$ und $\frac{\delta^2\int(\)}{2\delta x^2} = -$ oder auch $\frac{\delta\int(\)}{\delta y} = o$ und $\frac{\delta^2\int(\)}{2\delta y^2} = -$, ... oder aber zwischen x und y eine solche Gleichung besteht, dass $\frac{\delta\int(\)}{dx} = o$ und $\frac{\delta^2\int(\)}{2\delta x^2} = +$ oder auch $\frac{\delta\int(\)}{\delta y} = o$ und $\frac{\delta^2\int(\)}{2\delta y^2} = +$, wobei folgendes zu merken: Aus den Bedingnissen der Aufgabe folgt entweder schon irgend eine Relation zwischen x und y oder nicht, so dass also entweder durch das Wachsen von x zugleich auch y wächst und umgekehrt, oder aber dass x allein um Δx, oder y allein um Δy wachsen kann. Bei Aufgaben der ersten Art wird alles in Bezug auf x und y, hingegen bei Aufgaben der zweiten Art alles blos in Bezug auf x oder blos in Bezug auf y varirt. *)

Beispiel der ersten Art. Welche Gleichung muss zwischen x und y Statt

*) Wenn man während dem Differenziren dx als beständiges, und blos dy als veränderliches Inkrementum angenommen hat, und hiedurch auf den Ausdruck $\int(\)$ gelangt ist, und es kömmt darauf an, diese Integral-Funktion, sey es blos in Bezug auf x, oder in Bezug auf x und y zu variren, so kann beim Variren keineswegs dx als beständige Grösse betrachtet werden, da dx blos in Bezug des Differenzirens, nicht aber in Bezug des Varirens als beständige Grösse angenommen worden, sondern wenn besagtermassen varirt wird, alles wie immer durch x Ausgedrückte als veränderlich betrachtet werden muss; wohl kann dann beim Variren, δx, oder δy als beständiges Inkrementum angenommen werden, welches aber wieder nur blos in Bezug auf das Variren gelten kann.... Nimmt man hier δx als beständig an, und varirt blos in Bezug auf x, so ist $\delta\int(\ldots)$ das veränderliche Inkrementum, hätte man aber in Bezug auf x und

finden, wornach die Kurve konstruirt, $\int y\,dx$ zum *max.* wird, wenn nebstbei noch die Bedingniss eintreten soll, dass $\int\sqrt{dx^2+dy^2}=p$? Hiezu sage:

$$\frac{\delta\int y\,dx}{\delta y}=\int\frac{\delta(y\,dx)}{\delta y}=\frac{\int dx\,\delta y+\int y\,\delta dx}{dy}=\frac{\int dx\,\delta y+\int y\,d\,\delta x}{\delta y}$$

[Um die Bedingniss $\int\sqrt{dx^2+dy^2}=p$ mit in Rechnung zu bringen, so sage

$$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2}=o,\ \int\delta(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=\int\frac{(2\,dx\,\delta dx+2\,dy\,\delta dy)\,(dx^2+dy^2)^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$=\int\frac{dx\,\delta dx+dy\,d\,\delta y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{dx\,d\,\delta x+dy\,d\,\delta y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}=o,\ \text{woraus}\ d\,\delta x=-\frac{dy\,d\,\delta y.}{dx}\]$$

$$\frac{\int dx\,\delta y+\int y\,d\,\delta x}{\delta y}=\frac{\int dx\,\delta y-\frac{\int y\,dy\,d\,\delta y}{dx}}{\delta y}=\frac{\int dx\,\delta y+\int\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)-\frac{y\,dy}{dx}\,\delta y}{\delta y}$$

[und mit Bestimmung der Konstante, wenn x und y am Endpunkte $=$ a und b, am Anfangspunkte $=\alpha$ und β] $=$

$$\frac{\int dx\,\delta y+\int\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y}-\frac{b\,db}{da}-\frac{\beta\,d\beta}{d\alpha}.$$

Soll nun diess $=$ Null seyn, so muss hiezu an und für sich

$$\frac{\int dx\,\delta y+\int\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{dy}=o,\ \text{woraus}$$

$$\frac{dx\,\delta y+\delta y\,d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)}{\delta y}=o,\ \frac{y\,dy}{dx}+x=C,$$

$$y\,dy=C\,dx-x\,dx,\ \frac{y^2}{2}=Cx-\frac{x^2}{2}+D\ldots\ldots$$

y varirt, und es fände zwischen x und y irgend eine Relation statt, so wäre δy ein veränderliches Inkrementum, wie auch $\delta\int(\)$.

Man wird den Geist der Variationsrechnung ganz sicher fassen, wenn gleich dieser Gegenstand sehr abstrakt und ein Resultat schon vieler analytischer Vorkenntnisse und vieler in dem Gebiete des Infinitesimalkalkuls selbst verrichteter Rechnungen ist, wenn man nur im Stande ist den eigentlichen Sinn einer Variation überhaupt recht einzusehen.

Beispiel der zweiten Art. Bei welcher Gleichung zwischen x und y wird in der darnach konstruirten Kurven $\int\sqrt{dy^2+dx^2}$ ein Minimum? Sage:

$$\frac{\delta\int\sqrt{dy^2+dx^2}}{\delta y}=\frac{\int\delta\sqrt{dy^2+dx^2}}{\delta y}=$$

$$\frac{\int\frac{(dy^2+dx^2)^{-\frac{1}{2}}}{2}\,2dy\delta dy}{\delta y}$$

$$=\frac{\int\frac{dy^2 d\delta y}{(dy^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}}}{dy}=0\ldots\ldots$$ woraus wieder wie vorhin folgt:

$$\frac{\int\delta y . d\left(\frac{dy}{(dy^2+dx^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\delta y}=0\ldots\ldots\ldots$$

Erläuterungen vom §. 1. bis §. 140. inclusive.

ad Seite 9. Zeile 12. Gewöhnlich versteht man unter Beschleunigung einer in eine Masse wirkenden Kraft den in der ersten Zeiteinheit durchlaufenen Raum.

ad S. 9. Z. 25. Hiebei ist jedoch zu merken, dass wenn die Druckgrösse P [z. B. P Pfunde, oder P Centner...... was dann immer als Einheit des Gewichts mag festgesetzt worden seyn] die Grösse einer Kraft ausdrücken, d. h. deren Maass festsetzen soll, dass P allemal jenen Druck bedeuten muss, welchen diese Kraft auf einen (für diesen Druck P genugsam widerstehenden Punkt, um durch P keine Geschwindigkeit zu erlangen) fixen Punkt ausübt: denn kann ein durch diese Kraft angegriffener Punkt nur einen Gegendruck p (p sey $<$P) entgegen äussern, so wird auch von dieser Kraft auf besagtem Punkt nur der Druck p wirklich als Kraftäusserung Druck verwandt, und der übrige Theil der Kraft, welcher auf einen fixen Punkt zu dem Drucke p noch jenen P — p (da p + P — p = P) als Kraftäusserung Druck hinzufügen möchte, wird in diesem Falle nicht die Kraftäusserung Druck = P — p ausüben, sondern der Krafttheil der diesen Druck auszuüben fähig wäre, würde als Kraftäusserung Geschwindigkeitsertheilung verwendet statt zu drücken. Wird daher in der Folge die Grösse einer Kraft durch ihre Druckgrösse P bestimmt, so heisst P allemal

die Druckgrösse dieser Kraft auf einen fixen Punkt. P — p ist der Druck, den blos die Trägheit der Masse erwiedert.

Ad S. 10. Z. 12. Hier sind $\frac{\pi}{M}$, $\frac{\pi}{m}$ die auf die Einheit der Masse, sowohl in M als in m wirkenden Kräfte, die daher in einerlei Zeit auch proportionale Räume F und γ müssen durchlaufen machen, daher $\frac{\pi}{M} : \frac{\pi}{m} = F : \gamma$.

Ad S. 10. Zeile 16. Wenn selbige auf Massen wirkt, die durch sie so affizirt werden, dass sie schwere Massen sind; nicht etwa wenn z. B. ein Pfund eine blos träge nicht schwere Masse fortzöge . , ...

Ad S. 11. Zeile letzte. Woselbst Q die Druckgrösse auf einen fixen Punkt ist, welche jene Centralkraft hat, die auf N wirket, oder womit dem Drucke p noch jenen P — p (da $p + P - p = P$) als Kraftäusserung Druck $= P - p$ ausüben, sondern der Krafttheil, der diesen Druck auszuüben fähig wäre, würde als Kraftänsserung Geschwindigkeits-Ertheilung verwendet statt zu drücken; wird daher dieses N durch Q bestimmt, auf einen fixen Punkt drücken möchte, und woselbst N das Gewicht der Masse N ist, wohlverstanden jenes Gewicht oder jener auf einem fixen Punkt durch die schwere Masse N sich äussernde Druck, den sie auf unserer Erdoberfläche nicht in der Anziehungssphäre jenes Planeten äussert, wo Q auf N wirkt; das folgt hieraus: Heissen N und M blosse Massen, nicht Gewichte, und L das Gewicht der Masse N auf der Erde, so ist $N : M = L : P$, also $N = \frac{M}{P} \cdot L = L$, da $\frac{P}{M} = 1, P = M$, also $\frac{M}{P} = 1$. Was hier h heisst, nannten wir gewöhnlich G. Auch h ist auf dem fremden Planeten, so wie g auf unserer Erde eine beständige Grösse $h = \frac{g \cdot Q}{N}$, worin g eine beständige Grösse ist und $\frac{Q}{N}$ deshalb beständig ist, weil in dem Verhältnisse als N zu- oder abnimmt, auch Q zu- oder abnehmen muss; denn wird das (Erdgewicht, Planetengewicht nenne ich hier das Gewicht einer gegebenen Masse auf unserer Erde oder auf einem Planeten, wird z. B. jedes als Einheit der Masse angenommenes Massentheil der Masse $\mathfrak{M}$, die nemlich M solcher Masseneinheiten begreift, auf der Erde durch einen Druck p, im andern Planeten durch einen Druck q bestimmt, so ist dieser Masse $\mathfrak{M}$ Erdengewicht $= p. \mathfrak{M}$ und Planetengewicht $= q. \mathfrak{M}$.) Erdengewicht N z. B., um das dreifache grösser, so wird die Masse dieses Erdenge-

wichts dreimal so gross, also auch das Planetengewicht dieser Masse von N nemlich Q um das dreifache grösser; indem $N = p\,\mathfrak{M}$, und $Q = q\,\mathfrak{M}$, also $N : Q = = p.\mathfrak{M} : q.\mathfrak{M} = p : q$, welches $p : q$ ein beständiges Verhältniss, da p und q beständige Grössen.

Ad S. 12. Z. 31. Diese Kraft ist ihrer Druckgrösse P nach auf einen fixen Punkt ausgedrückt.

Ad S. 13. Z. 3. Geschwindigkeit heisst hier eigentlich die in einerlei Zeiteinheit vom Ruhestande aus durchlaufenen Räume.

Ad S. 13. Z. 7. Wenn von einer Kraft, die keine Centralkraft ist, die Rede ist, deren Druckgrösse auf einen fixen Punkt $= P$, und es wirkt diese Kraft auf eine Masse M (M die Anzahl Masseneinheiten, welche diese Masse enthält, und wo das Gewicht jeder solchen Masseneinheit auf der Erde als Einheit des Gewichts angenommen werden kann, unter welcher Voraussetzung allein M zugleich die Masse und das Gewicht dieser Masse auf unserer Erde ausdrückt; denn wäre das Gewicht der angenommenen Masseneinheit nicht $= 1$ sondern $= p$, so wäre die Massengrösse unserer Masse $= M$ und deren Erdengewicht $= p.\,M$ und nur $= M$ für $p = 1$), so ist P eine beständige Grösse, eben so Mh eine beständige Grösse, eben so M. v, wenn wir v die in der Zeit t ertheilte Endesgeschwindigkeit nennen, und t als beständig annehmen, welches auch, ohne die Formeln der beschleunigten Bewegung zu Hülfe zu nehmen, an und für sich klar ist. Denn es ist Mh die durch P bewirkte Menge des durchlaufenen Raums in einer gegebenen Zeit, eben so M.v die durch P mittelst der während einer gegebenen Zeit fortgesetzten Einwirkung auf träge Elementartheilchen ertheilte Bestimmung in jeder folgenden Zeiteinheit die Menge des Raums Mv zu durchlaufen. Diese Produkte bestimmen die Grösse der Wirkungen einer Kraft, so wie P, mit eben dem Rechte, als man also Nichtcentralkräfte durch das Verhältniss ihrer auf fixe Punkte ausgeübten Drucke P, P′ misst, kann man sie auch durch das Verhältniss von $Mh : M'h'$ oder durch jenes von $Mv : M'v'$ bestimmen; solche Kräfte verhalten sich also (wenn wir gleich deren Natur nicht kennen, also auch ihre absolute Grösse nicht angeben können, indem wir nicht einmal anzugeben im Stande wären, was als Einheit dieses Masses angenommen werden müsse) $= P : P'$ oder $= M.\,h : M'h'$. Da bei einer gegebenen Kraft, die keine Centralkraft ist, P, M.h, M.v, beständige Grössen sind, aber M veränderlich ist, so muss auch $\frac{P}{M}$ oder die beschleunigende Kraft einer solchen Kraft, nemlich der auf die Einheit der Masse M ausfallende Drucktheil veränderlich seyn. Eben so

ist auch h und v veränderlich, da M es ist und Mh und Mv nicht; es muss nemlich h und v in dem Verhältnisse zu- oder abnehmen als M ab- oder zunimmt. Wenn das Gewicht von z. B. 10 Pfunden, das also durch die Centralkraft, Anziehungskraft der Erde gegen deren Mittelpunkt, einen Druck von 10 Pfunden auf eine horizontale unbewegliche Ebene ausübt, an ein anderes Gewicht von z. B. 3 Pfunden befestigt wird, so ist der nunmehr bestehende Druck $= 13$ Pfunde, (also der Druck verändert), und die beschleunigende Kraft $= \frac{13}{M+m}$ wenn M und m die Massen sind, die 10 ℔ und 3 ℔ wiegen; wiegt nun die Einheit der Masse $= p$, so ist $Mp + mp$ oder $(M+m)\,p = 13$ ℔, also ist nun die beschleunigende Kraft $= \frac{(M+m)p}{M+m} = p$ und, als blos die 10 ℔ bestanden, war die beschleunigende Kraft $\frac{10}{M}$ oder $\frac{M.p}{M} = p$; (also die beschleunigende Kraft unverändert). Diess gibt schon einiges Licht über den Unterschied der Centralkräfte und Nicht-Centralkräfte.

Hätte dies Gewicht von 10 ℔ in eine blos träge nicht schwere Masse $\mathfrak{M}$ zu wirken, so bliebe der auf die horizontale unbewegliche Ebene sich äussernde Druck $=$ 10 ℔, denn die träge Masse $\mathfrak{M}$ trägt zur Zu- und Abnahme des Druckes nichts bei; die beschleunigende Kraft ist in diesem Falle $\frac{10}{M+\mathfrak{M}}$, und war vor Hinzuthun von $\mathfrak{M}$, $= \frac{10}{M}$. Man sieht, dass in diesem Falle 10 ℔ ganz den Gesetzen einer Nichtcentralkraft unterliege. Es kann demnach das Gewicht einer schweren Masse nach Verschiedenheit der Umstände als Centralkraft oder als Nichtcentralkraft betrachtet werden. Ich möchte sagen: Eine Kraft ist dann als Centralkraft zu behandeln, wenn sie auf Massen dadurch wirkt, dass sie unmittelbar jedes Element dieser Masse mit einer bestimmten Kraftäusserung angreift, unabgesehen ob die Masse grösser oder kleiner sey, wodurch der Totaldruck der Masse durch die Grösse der Masse bestimmt wird. Hingegen ist eine Kraft eine Nichtcentralkraft, wenn sie unabgesehen auf die Grösse der Masse selbiger einen bestimmten Totaldruck ertheilt, wodurch erst der Druck jedes Elements bestimmt wird. Bei der Centralkraft schliesst man aus der unveränderlich beschleunigten Kraft auf die veränderliche bewegende Kraft, hingegen bei der Nichtcentralkraft aus der unveränderlichen bewegenden Kraft auf die veränderliche

beschleunigenden Kraft (in beiden Fällen die Masse als unveränderlich betrachtet); im ersten Falle durch Multiplication, im zweiten durch Division.

Ad S. 13. letzte Zeile. Wir können nemlich nicht *a priori* als Axiom annehmen, dass die anziehende Kraft der Planeten gegen träge Masseneinheiten unter übrigens gleichen Umständen beschleunigende Kräfte ausüben müssen, die den Massen der Planeten proportional sey. Wir nehmen diese an sich nicht ungereimte Voraussetzung als Hypothese an, bauen hierauf unsere auf diese Kräfte Bezug habenden Berechnungen, nach Regeln der reinen Mathematik, von deren Richtigkeit wir *a priori* überzeugt sind, die also nur dann ein richtiges Resultat liefern können, wenn diese Hypothese richtig ist; stimmt also das Resultat der Rechnung mit der Erfahrung überein, so ist die Richtigkeit der Hypothese dargethan. Diess blos positive Naturgesetz würde denn aus einem positiven in ein natürliches umgewandelt, wenn es der Metaphysik gelingen möchte, selbiges *a priori* zu beweisen.

Ad S. 15. Z. 5. Der Ausdruck: Heftigkeit seines Stosses will hier nicht sagen, die Grösse des Schlags auf einen ruhenden Widerstand beim Falle eines Körpers durch die Centralkraft gegen den Mittelpunkt eines Planeten, sondern die Heftigkeit seines sich selbst Fortstossens gegen besagten Mittelpunkt während seiner ungehinderten Bewegung, welche Heftigkeit des Stosses ganz natürlich proportional dem Produkte aus der fortgestossenen Masse in den Raum oder auch in die Endesgeschwindigkeit, welche in gegebener Zeit durchlaufen oder erlangt worden.

Ad S. 15. Z. 17. Hier ist von solchen Massen die Rede, bei denen angenommen werden kann, dass diese Entfernungen von ihren Mittelpunkten an gemessen werden.

Ad S. 15. Z. 20. Hier ist nemlich A die Zahl, welche die Anzahl der im Centralkörper enthaltenen Masseneinheiten andeutet; ferner ist hier in einer bestimmten Mittelpunktsentfernung des Centralkörpers die Anziehungskraft der Masseneinheit gegen die Masseneinheit des angezogenen Körpers $= 1$ angenommen, so jene von A, nemlich die absolute Kraft $= A. 1 = A$; ferner ist jene Entfernung vom Mittelpunkte des Centralkörpers, wo die absolute sich auf einen Massentheil des angezogenen Centralkörpers äussernde Kraft A, welche die beschleunigende Kraft des angezogenen Körpers daselbst ausmacht, als Einheit der Entfernungen angenommen, also wenn die beschleunigende Kraft in der Mittelpunktsentfernung $r = x$, so $A : x = r^2 . 1$, daher

$$x = \frac{A}{r^2}.$$

Ad S. 16. Z. 2. Es ist bekannt aus der Formel $G = g.\frac{P}{M}$ und folgt aus (Astronom. §. 7.), dass die Beschleunigung (der in der ersten Zeiteinheit durchlaufene Raum) jeder aus dem Ruhestande auslaufenden blos durch einen beständigen Druck P bestimmten Masse M sey das Produkt aus der Beschleunigung g der Schwere in den Druck (auf einem fixen Punkt gemessen) der Einheit der Masse, wenn das Erdengewicht der Einheit der Masse = 1 gesetzt wird; es ist also $h = \frac{A.a^2}{T.r^2}$ richtig, wenn $\frac{A.a^2}{T.r^2}$ das Gewicht z der Einheit der Masse in der Entfernung r vom Mittelpunkte des Weltkörpers dessen Masse = A ist, und wenn das Erdengewicht der Einheit der Masse = 1; ist aber diess angenommen, so ist $1 : z = \frac{T}{a^2} : \frac{A}{r^2}$ also $z = \frac{A}{r^2} : \frac{T}{a\,2} = \frac{A.a^2}{T.r^2}$. Wenn nun A′ und r′ die Zahlen andeuten, um die wie vielfache A, r, grösser oder kleiner als T und a, so dass T: A = 1: A′, a: r = 1: r′, woraus A = A′.T, und r = a. r′, so ist $h = \frac{A'.T.a^2}{T.a^2.r'^2}$, $g = \frac{A'}{r'^2}\,g$. Hier drückt $\frac{A'}{r'r'}$ das Gewicht der Einheit der Masse in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Masse A′ gegen dieser Masse Mittelpunkt aus, und da hier als Einheit der Masse und der Mittelpunktsentfernung A′ und r′ angenommen worden die Masse der Erde und der Halbmesser der Erde, so drückt hier $\frac{A'}{r'r'}$ aus: das Gewicht einer Masse, die so viel materielle Theile als die Erde enthielte, welches Gewicht sich gegen den Mittelpunkt des Himmelskörpers von der Masse A′ dann äussert, wenn jene Masse vom Mittelpunkte dieser Masse A′ um r Erdhalbmnsser entfernt wäre, woselbst A′ die Zahl ist, welche andeutet, wie oft die Masse der Erde in jener A′ enthalten sey.

Ad S. 16. Z. 7. Ist nemlich die beschleunigende Kraft in der Entfernung e vom Mittelpunkte A = K, und jene in derselben Entfernung e vom Mittelpunkte von T = Q, so ist A: T = K: Q, oder $\frac{A}{T} = \frac{K}{Q}$.

Ad S. 16. Z. 15—20. Der Ausdruck $\frac{A}{r\,r}$ bestimmt das Gewicht der Einheit der Masse gegen den Mittelpunkt der Centralmasse A, wenn die Einheit der Masse von diesem Mittelpunkte um r entfernt ist, wobei vorausgesetzt wird, dass als Einheit des Druckes oder Gewichtes jener Druck angenommen wird, womit in der als Einheit

angenommenen Entfernung vom besagten Mittelpunkte die Einheit der angezogenen Masse gegen diesen Mittelpunkt strebt, wohlverstanden, durch den blossen Einfluss der Einheit der Masse des Centralkörpers, welche Masseneinheit der Centralmasse keine beliebige Lage hat, sondern in einer solchen Lage angenommen werden muss, dass sich ihre ganze Anziehungskraft eben so im Mittelpunkte der Masse A konzentrirt, wie sich die Anziehungskraft der Masse A in demselbem Mittelpunkte konzentrirt. Unter denselben Voraussetzungen drückt hier $\frac{A}{r.r}.M$ aus: das Totalgewicht der Masse M gegen den Mittelpunkt der Centralmasse A, in der Entfernung r von diesem Mittelpunkte; eben so drückt $\frac{M}{r.r}.A$ aus: das Totalgewicht der Masse A gegen den Mittelpunkt der Centralmasse M in der Entfernung r von diesem Mittelpunkte. (Um hier allen Zweifeln vorzubeugen stelle man sich jede Masse in einen so kleinen Raum gepresst vor, dass gegen die Entfernung r der Mittelpunkte zweier Massen jene Entfernungen als verschwindende Grössen wegfallen, worum die verschiedenen Elemente der 2 Massen näher oder weiter von einander abstehen als r) Wenn also die Mittelpunkte der Massen A und M von einander um r abstehen, so wägen sie gleichviel gegen einander, da $\frac{A}{r.r}.M = \frac{M}{r\,r}.A$, d. h. sie würden auf fixe Punkte, die sie hindern würden sich einander zu nähern, gleich grosse Drucke $\frac{A}{r\,r}.M = \frac{M}{r\,r}.A$ ausüben; daher auch (Astr. §. 9.) wenn sich A und M einander ungehindert nähern könnten, die bewegende Kraft $\frac{A}{r.r}.M$, wenn während der kleinen Zeit τ das r als unverändert angesehen werden könnte, eine Menge der Bewegung hervorbringen würde die dem $\frac{A}{r\,r}.M$, so wie die bewegende Kraft $\frac{M}{r.r}.A$...... eine Menge der Bewegung bewirken würde die dem $\frac{M}{r.r}.A = \frac{A}{r\,r}.M$ proportional, daher während der ganzen Zeit des Näherns von A und M in jeder solchen kleinen Zeit τ einerlei Menge von Bewegung in A und M bestünde, daher denn auch während der ganzen Zeit des Näherns bis zum Augenblicke des Zusammenstossens einerlei Menge der Bewegung in A und M bestünde. Dass in jedem Zeittheilchen $\tau, \tau' \tau''$,.... die Menge der Bewegung beiderseits eine andere seyn müsste versteht sich, da r immer kleiner, also

$\frac{A}{rr}.M = \frac{M}{rr}.A$ immer grösser wird; die Gleichung $\frac{A}{rr}.M = \frac{M}{r.r}.A$ bezieht sich immer auf denselben Zeitpunkt der Beobachtung beider Massen.

Ad S. 17. Z. 23. Hier ist λ darum durchaus dieselbe Grösse, weil die jedesmalige Geschwindigkeit der Summe der erhaltenen Stösse proportional; ist z. B. $p + p' = 3p$, so ist auch $c' = 3c$ also $\frac{p+p'}{c'} = \lambda$ wenn $\frac{p}{c} = \lambda$ ist.......

Ad S. 18. Z. 25. Da nemlich $\frac{P}{p} =$ einer beständigen Grösse A gleich ist, indem allemal p dem P proportional, so $P = p\,A$ oder $p = \frac{1}{A}\,P = B.P$, woselbst A ein Unendlichgrosses und daher B eine beständige Nulle; es ist nemlich p der in der unendlich kleinen Zeit τ ausgeübte Stoss oder Fortrückungsakt der beschleunigenden Kraft P auf die Einheit der Masse, welcher Stoss freilich klein seyn muss, wenn gleich der Druck oder das Gewicht P der Einheit der Masse endlich ist, indessen muss auch dieser unendlich kleine Stoss dem P proportional seyn. Aus $p = B.P$ und $r = \frac{1}{\lambda}.t$ folgt: $v = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{B.P}{\tau}.t$, wo $\frac{B}{\tau}$ eine endliche beständige Grösse N, also $r = \frac{1}{\lambda}.N.P.t$, oder die beständige Grösse $\frac{1}{\lambda}.N = \lambda$ gesetzt, wo das λ rechts nicht dasselbe ist als λ links, $v = \lambda.P.t$. Hier bedeutet P den Druck, den die Einheit der Masse auf einen fixen Punkt ausüben würde, in jedesmaligen Zeittheilchen τ. Man sieht leicht ein, dass hier v blos jene Endesgeschwindigkeit ist, welche die Einheit der Masse blos durch Einwirken der beständigen beschleunigenden Kraft P während t Zeiteinheiten fortwährender Wirkung zu jener Geschwindigkeit c oder o, welche diese Einheit der Masse zu Anfange besagter t Zeiteinheiten hatte; daher die Totalgeschwindigkeit dieser Einheit der Masse zu Ende der Zeit $t = c + v$ oder $o + v = r$.

Ad S. 19. Z. 2. Hier heisst wieder $v = \lambda.P.t$ die Endesgeschwindigkeit die blos während der Zeit t der Einheit der Masse zu jener zugewachsen, die sie zu Anfang von t hatte.

Ad S. 19. Z. 23. Die hier erwähnten Stösse auf die geradlinigte Bahn der jedesmaligen Bewegung beziehen sich immer senkrecht auf diese Bahn; wäre z. B. a b (Taf. I. Fig. 2.) die Bahn eines mit Geschwindigkeit c = h l gleichförmig laufenden Körpers, und er bekäme in h einen Stoss nach h i die ihm die Geschwindigkeit h s nach h i ertheilte, so hätte er die Geschwindigkeit h p nach h l, bekäme er nun in k einen

auf hl senkrechten Stoss, die ihm......, so liefe er nach kn,.....; wären nun diese Stösse durch endliche Zwischenzeiten von einander getrennt, so durchliefe der Körper eine gebrochene Linie wie ahkr....; würden hingegen die Stösse nur durch unendlich kleine Zeiten auf einander folgen, also beständig fortwirken, und in jedem Zeittheilchen nur unendlich kleine Stösse geben, also nur unendlich kleine Bahnsablenkungen verursachen, so wäre die durchlaufene Bahn ahkr...... eine Kurve, deren Gesetz von jenem des Wachsens und Abnehmens der auf einander kontinuirlichen folgenden Stösse abhinge; wären diese Stösse beständig von einerlei Grösse, also die Ablenkungen oder Winkel der Tangenten mit den kommenden Elementen α, β, ... immer einerlei Grössen $\alpha = \beta = \ldots\ldots$, so wäre die Kurve ein Kreis......

Ad S. 20. Z. 30. Bezieht sich $s = \frac{1}{2}\lambda P$ auf den in der ersten Sekunde von der Ruhe aus blos durch die Schwerkraft der schweren Masse herabgefallenen Raum durch diese Masse, so ist P die beschleunigende Kraft der Schwere, der Druck oder das Gewicht der Einheit der Masse, welche als Einheit allen andern beschleunigenden Kräfte angenommen wird.

Ad S. 21. Z. 7. Hiebei ist zu bemerken, P bezieht sich immer nur auf das Ende der Zeit t und des Raumes s, und ist während der Nullinkremente dt von t oder jener ds von s eine beständige Grösse, die zwar (streng genommen) auch während dem 1ten, 2ten, 3ten..... Theile von dt oder von ds um die unendlich kleinen Krafttheile Drucktheile π, π' π'' zu- oder abnimmt, wo aber dann $P \pm \pi = P$, $P \pm \pi' = P$, immer dieselbe, man mag als Einheit des Drucks annehmen was immer für ein Gewicht, denn P ist die Zahl, welche andeutet, wie oft die angenommene Einheit des Gewichts genommen werden muss, um in dem bestimmten Falle die Grösse des Drucks zu bestimmen, welche die Einheit der Masse auf einen fixen Punkt ausübt, wobei aber als Einheit des Gewichts allemal jenes angenommen werden muss, welches besagte Einheit der Masse [als schwere Masse auf der Oberfläche der Erde betrachtet] besitzt, da aus der Arithmetik bekannt ist, dass man durch ein und dieselbe Zahl verschiedene absolute Grössen ausdrücken kann, wenn nur verschiedene Einheiten als Maass angenommen werden. Würde z. B. eine Masse M durch eine bewegende Kraft P′ bestimmt, und man nimmt M als Einheit der Masse an, so ist P′ zu gleicher Zeit die beschleunigende Kraft P dieser Masse, und es wäre P hier jene Zahl, welche anzeigen möchte, wie oft das Gewicht der schweren Masse M genommen werden müsse, um den Druck P zu geben; würde hingegen in demselben

Falle $\frac{M}{2}$ als Einheit der Masse angenommen, so wäre hier die beschleunigende Kraft $P = \frac{P'}{2}$, nichts desto weniger wäre aber hier P ganz dieselbe Zahl als vorhin; denn nun ist P jene Zahl, welche ausdrückt, wie oft das Gewicht von $\frac{M}{2}$ genommen werden müsse, um den Druck $\frac{P'}{2}$ zu geben. Offenbar drückt aber ein und dieselbe Zahl einmal die absolute Grösse 1 und einmal jene $\frac{1}{2}$ aus, wenn im ersten Falle die angenommene Einheit doppelt so gross als im zweiten Falle ist.

Ueberhaupt sieht man hier leicht ein, dass die Zahl P allemal erhalten werde, wenn man die bewegende Kraft P′ einer ganzen Masse M durch das Gewicht N dieser Masse M dividirt, wobei zu merken, dass P′ den Totaldruck der ganzen Masse M bedeutet, wobei so wie bei N als Einheit des Gewichts oder Drucks das Gewicht (als schwere Masse auf der Oberfläche der Erde betrachtet) jener Masse angenommen ist, welche als Einheit der Masse bei M angenommen ist, welche nemlich in der Masse M so oft enthalten ist, als M als Zahl betrachtet Einheiten in sich enthält. Ist z. B. der Totaldruck auf eine Masse, deren Gewicht = 10 ℔ ist, = 30 ℔, so ist die beschleunigende Kraft dieser Masse, nemlich der Druck den jede Einheit dieser Masse ausübt $= \frac{30}{10} = 3$ ℔, und also P in diesem Falle blos als Zahl betrachtet = 3. Es versteht sich, dass die beschleunigende Kraft in jedem Augenblicke dt, und der Standpunkt ds auf dieselbe Richtung gezogen wird, als die bewegende Kraft, und dass, wenn von Bewegung die Rede ist, welche durch die Wirkung der beschleunigenden Kraft in die ganze Masse, oder durch jene der beschleunigenden Kraft in die Einheit der Masse hervorgebracht wird, die bewegende Kraft P′ allemal jenen Totaldruck der bewegten Masse andeutet, welchen diese Masse während ds oder dt auf einen fixen Punkt nach jener Richtung ausüben möchte, nach welcher sie während ds oder dt wirklich läuft, also nach der Richtung von ds. Es ist bei diesen Formeln ferner zu bemerken: Es bedeutet s den in der Zeit t Zeiteinheiten durchlaufenen Raum s Längeneinheiten, (also allemal eine rektifizirte Länge, es mag die Bewegung gerade oder krummlinigt seyn); es bedeutet v jene v Längeneinheiten, welche die bewegte Masse nach der Richtung von ds in jeder folgenden Zeiteinheit durchlaufen würde, von dem letzten Augenblicke der Zeit anzufangen, wenn in diesem Augenblicke das Daseyn der bewegenden Kraft plötzlich aufhören möchte und die Masse sich ihrer blossen Trägheit überlassen bliebe. Dieses ist der Begriff der Endesgeschwindigkeit von v. Es bedeutet t jene Zeiteinheiten, während welchen der

Raum s Längeneinheiten durchlaufen worden, und in deren letzten Zeitpunkte die Endesgeschwindigkeit v Längeneinheiten besteht. Sowohl v als s bedeuten nicht Raum und Endesgeschwindigkeit, welche die Masse ihrer bewegenden Kraft allein zu danken hat, sondern den ganzen durchlaufenen Raum s in der Zeit t und die ganze Endesgeschwindigkeit v zu Ende der Zeit t, welche Funktionen die Masse nicht allein der bewegenden Kraft P′, sondern zugleich auch der anfänglichen gleichförmigen Geschwindigkeit c, welche sie ihrer Trägheit zufolge nicht verloren hat, dankt. Es bedeutet endlich g jene g Längeneinheiten, welche eine vom Ruhestande auslaufende, blos durch ihre Schwere an der Oberfläche der Erde bestimmte Masse in der ersten Zeiteinheit ihrer Bewegung durchläuft, daher g (als Zahl betrachtet) nur dann $= 15,625$, wenn die angenommene Längeneinheit ein Rheinländer Fuss, und die angenommene Zeiteinheit 1 Secunde ist.

Dem hier Gesagten zufolge können obige Fundamentalformen auch so ausgedrückt werden:

$$1)\ v = \frac{ds}{dt},\quad 2)\ d^2s = dr.dt,\quad 3)\ dv = 2g.\frac{P'}{N}.dt,\quad 4)\ d^2s = 2g.\frac{P'}{N}.dt^2.$$

Ad S. 21. Z. 20. Wenn während der Zeit t die beschleunigende Kraft P eine beständige Grösse bleibt, so ist $s = g.P.t^2 + t.c$, wenn zu Anfange der Zeit t schon Geschwindigkeit c bestand, also $g.P.t^2$ blos durch P in Zeit t durchlaufene Raum; also ist der in Zeit dt durchlaufene Raum blos durch den Einfluss der beschleunigenden Kraft $P = g.P.dt^2 = \frac{2g.P.dt^2}{2} = \frac{d^2s}{2}$, oder d^2s dieser doppelte Raum.

Ad S. 21. Z. 21. Die Richtigkeit des hier Gesagten folgt hieraus: s ist eine Funktion von t, $s = f(t)$; aber nach Taylors Formel:

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \frac{d.f(t)}{dt}\Delta t + \frac{d^2f(t)}{dt^2}.\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots\ldots \text{ oder:}$$

$$s + \Delta s = s + \frac{ds}{dt}.\Delta t + \frac{d^2s}{dt^2}.\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^3s}{dt^3}.\frac{\Delta t^3}{2.3} + \frac{ds^4}{dt^4}.\frac{\Delta t^4}{2.3.4} + \ldots\ldots \text{ also:}$$

$$s + ds = s + \frac{ds}{dt}.dt + \frac{d^2s.dt^2}{dt^2.2} + \frac{d^3s.dt^3}{dt^3.2.3} + \ldots\ldots \text{ also:}$$

$$ds = ds + \frac{d^2s}{2} + \frac{d^3s}{2.3} + \frac{d^4s}{2.3.4} + \frac{d^5s}{2.3.4.5} + \ldots\ldots = ds + \frac{d.ds}{2} + \frac{d.d.ds}{2.3} + \ldots$$

$$= vdt + \frac{d.vdt}{2} + \ldots\ldots = vdt + \frac{dv.dt}{2} + \frac{d^2v.dt}{2.3} + \ldots\ldots = vdt + \frac{2g.P.dt.dt}{2} + \ldots$$

$ds = vdt + \frac{\not{2}g.P.dt^2}{\not{2}} + \frac{\not{2}g.dP.dt^2}{\not{2}.3} + \frac{\not{2}g.d^2P.dt^2}{\not{2}.3.4} + \ldots\ldots$ Hier zeigt sich, dass $ds = vdt \left(\frac{d^2s}{2} = g.P.dt^2\right) \frac{d^3s}{2.3} = \frac{g.d^2P.dt^2}{3.4}$ (....... Es folgt hier auch aus $ds = ds + \frac{d^2s}{2} + \frac{d^3s}{2.3} + \frac{d^4s}{2.3.4} + \ldots.$ oder $ds = d\left(s + \frac{ds}{2} + \frac{d^2s}{2.3} + \frac{d^3s}{2.3.4} + \ldots\right)$ oder aus $ds = d\left(s + \frac{vdt}{2} + \frac{d^2vdt}{2.3} + \frac{d^2.vdt}{2.3.4} + \ldots.\right)$ dass wenn $vdt = o$ also eine beständige Grösse, z. B. o.m, dass der Koeffizient von $\frac{d.vdt}{2} = \frac{d^2s}{2}$, eben so von $\frac{d.vdt}{2.3} = \frac{d^2s}{2.3}, \ldots. = o$, welches man so ausdrückt; es verschwindet $\frac{d^2s}{2}, \frac{d^3s}{2.3}, \ldots.$ wenn $vdt = o$, es ist aber $vdt = o$ wenn $dv = o$; denn ist $dv = o$, so $v = C$, $vdt = Cdt$, oder da $C.dt = o$, nemlich o mit beständigen Koeffizienten, so $vdt = o$. Es folgt aus $ds = vdt + \frac{g.P.dt^2}{2} + \frac{g.d.P.dt^2}{3} + \ldots.$ worin $\frac{g.P.dt^2}{2} = \frac{ds^2}{2}, \frac{g.d.P.dt^2}{3} = \frac{d^3s}{2.3}, \ldots..$ dass wenn $P = o$ ist, $ds = vdt + \frac{g.o.dt^2}{2} + \frac{g.d.o.dt^2}{2.3} + \ldots..$, dass in diesem Falle der Koeffizient von $\frac{d^2s}{2}$, eben so von $\frac{d^3s}{2.3}$, $= o$, also sagt man wieder, es verschwinde dann $\frac{d^2s}{2}, \frac{d^3s}{2.3} + \ldots..$ Es folgt aber dieses auch unmittelbar daraus: $d^2s = dv.dt^2$, also für $dv = o$, $d^2s = o.dt^2$; eben so $d^2s = 2g.P.dt^2$, für $P = o$, $d^2s = 2g.o.dt^2$. Man bemerke dass aus $dr = o$ folgt $v = C$, also in diesem Falle v eine beständige Grösse; ist aber zu Ende jeder Zeit t die Endesgeschwindigkeit v eine beständige Grösse, so besteht gleichförmige Bewegung, welche nur dann möglich, wäre der Körper am Ende Zeit t seiner blossen Trägheit überlassen geblieben, hätte nemlich schon zu Anfange von dt die beschleunigende Kraft auf die Bewegung zu wirken ganz aufgehört, so hätte die bewegte Masse in der Zeit dt blos den Raum vdt durchlaufen; wirkt aber während Zeit dt die beschleunigende Kraft auf die Masse der Einheit der Masse nach der Richtung von ds beständig fort, so durchläuft diese Masse einen Raum ds, der kleiner ist als vdt oder ds, um das positive oder negative Stück $\frac{d^2s}{2} + \frac{d^3s}{2.3} + \frac{d^4s}{2.3.4} + \ldots..$ oder um $d\left(\frac{vdt}{2}\right) + d^2\left(\frac{vdt}{2.3}\right) + d^3\left(\frac{vdt}{2.3.4}\right) + \ldots..$ oder um $\frac{dv.dt}{2} + \frac{dv^2.dt}{2.3} + \frac{d^3v.dt}{2.3.4} + \ldots.$ oder um

$\frac{2g.P.dt.dt}{2} + \frac{d(2g.P.dt)}{2.3} dt + \frac{d^2(2g.P.dt)}{2.3.4} dt + \ldots\ldots$ oder um $g.P.dt^2 + \frac{2g.d.P.dt^2}{2.3} + \frac{2g.d^2.P.dt^2}{2.3.4} + \ldots\ldots$

Das Paradoxe der Behauptung $ds = ds + \frac{d^2s}{2} + \frac{d^3s}{2.3} + \frac{d^4s}{2.3.4} + \ldots\ldots$ fällt sogleich hinweg, wenn man bedenkt, dass $\frac{d^2s}{2}$, $\frac{d^3s}{2.3}$, ... gegen ds verschwinden, und dass diess blos eine Folge der nichts Ungereimtes enthaltenden Gleichung ist:

$$\Delta s = \Delta t . \frac{ds}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} . \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{2.3} . \frac{ds^3}{dt^3} + \frac{\Delta t^4}{2.3.4} . \frac{d^4s}{dt^4} + \ldots\ldots$$

Da in der Folge manches gesagt wird, wozu richtige Begriffe über die Theorie des Pendels, der Trägheitsmomente, und des Schwerpunkts erforderlich sind, so will ich hier diese Gegenstände ganz kurz aber fasslich vortragen. Diese eingeschobenen Paragraphe bezeichne ich auf eine andere Art, als jene in der physischen Astronomie von Herrn Schubert bezeichnet sind.

§. I.

Wir wollen mit dem Pendel den Anfang machen. Es befinde sich ein Körper auf der krummen Linie so weit, dass sein Schwerpunkt in O (Taf. I. Fig. 3.) ist, drückt nun OR seine Schwere = M aus, so ist OF die respektive Kraft P, die ihn parallel zur schiefen Fläche (Tangente in dem Punkte E) herabzieht, und ON der Druck senkrecht auf das Element E, welcher durch einen eben so grossen Gegendruck erwiedert wird, und daher zur Bewegung gar nichts beiträgt. Errichtet man in E eine Ordinate DE bis zur Abscissenlinie, und in eine $\frac{1}{\infty}$ Entfernung eine zweite Ordinate nd, so ist das Differenzial in E ∽ OFR, also M : P = ds : dy, folglich $\frac{E}{M} = \frac{dy}{ds}$, und daher für alle dergleichen Fälle folgende Grundformeln:

$$2g\frac{P}{M} = \frac{2g\,dy}{ds} = \frac{du}{dt} = \frac{udu}{ds} = \frac{dds}{dt^2}.$$

(Hier ist dt beständig angenommen). s in Zeit t durchlaufener Raum, u Endesgeschwindigkeit zu Ende Zeit t, M Gewicht während der ganzen Zeit dasselbe, P die bewegende Kraft nach ds während dt, denn in jedem dt ist P eine andere Kraft, P allemal ihrer Druckgrösse nach auf fixen Punkt ausgedrückt, also in denselben Gewichten als M.

§. II.

Integrirt man die Gleichung $2g.\frac{dy}{ds}=\frac{udu}{ds}$, so ist $4gy=u^2+C=u^2$, folglich y oder $ED=\frac{u^2}{4g}$ wenn $C=o$, welches Statt hat, wenn y und u zugleich zu Null werden, wenn nemlich die Bewegung in A aus dem Ruhestande vor sich geht, der dann $4g.o=o^2+C$; d. i. die Geschwindigkeit, die ein Körper auf was immer für einer krummen Linie bis zu irgend einem Punkte derselben blos durch die relativen Kräfte seiner Schwere erlangt hat, gehört immer der senkrechten Höhe zu (als Fallraum), die aus dem Punkte, wo der Körper seine Bewegung angefangen hat, herabgelassen wird, bis zur Horizontallinie, welche durch den Ort des Körpers gezogen wird.

Man sieht schon daraus, dass die Geschwindigkeit, die der Körper M, nach einer gegebenen senkrechten Entfernung DE von der Horizontallinie, die durch seinen Auslaufpunkt A geht, erreicht, gar nicht von der Kurve abhänge.

§. III.

Die Bewegung eines Körpers über eine gemeine Cykloide mittels seines Gewichtes.

Auflösung. Bekanntlich sind für die Cykloide folgende Gleichungen: (Tab. XIII. Fig. 1.) $Ab=x=a\varphi-a\sin\varphi$, wo a den Halbmesser bedeutet, der die Cykloide erzeugt hat, so dass $EN=2a$ ist, $AB=s$.

$Bb=y=a-a.\operatorname{Cos}\varphi$.
$dx=ad\varphi-ad\varphi.\operatorname{Cos}\varphi$ und
$dy=ad\varphi\sin\varphi$, folglich
$dx:dy=1-\operatorname{Cos}\varphi:\sin.\varphi=y:\sqrt{2ay-y^2}$. denn es ist $a-y=a.\operatorname{Cos}\varphi$, und $a^2-2ay+y^2=a^2\operatorname{Cos}^2\varphi=a^2-a^2\sin^2\varphi$, folglich $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$; nun ist $dx=ad\varphi-a.d\varphi.\operatorname{Cos}\varphi$, aber aus $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$ ist $d\varphi\operatorname{Cos}\varphi=\frac{1}{2}\frac{(2ay-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(2ay-y^2)}{a}=\frac{(a-y)\,dy}{a\sqrt{2ay-y^2}}$ und aus $y=a-a\operatorname{Cos}\varphi$ oder $\operatorname{Cos}\varphi=\frac{a-y}{a}$ oder $\varphi=\operatorname{Arc.Cos}\left(\frac{a-y}{a}\right)$, ist

$$d\varphi=\frac{-d\left(\frac{a-y}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a-y}{a}\right)^2}}=\frac{+dy}{\frac{a\sqrt{a^2-a^2+2ay-y^2}}{a}},\text{ also } dx=\frac{a.\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}-\frac{a.\,ady+aydy}{a\sqrt{2ay-y^2}}=$$

$\frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}$; hieraus folgt $dx:dy=\frac{y.\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}}:dy=\frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}:1=y:\sqrt{2ay-y^2}$.

$dx = \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$, ferner ist $ds^2 = dy^2 + \frac{y^2 dy}{2ay - y^2}$ oder $ds = dy \sqrt{\left(\frac{2a}{2a - y}\right)}$. Um die Betrachtung allgemeiner zu machen, so wollen wir es so betrachten, als wenn der Körper nicht in A sondern in B seine Bewegung angefangen hätte, so dass, wenn wir $EN = 2a$, $EF = Bb = b$ und $DL = y$ (die Ordinate für den Punkt D wo er sich befindet) setzen, dessen entsprechende Abscisse $x = AL$, sein grösstmöglichster Fallraum $FN = 2a - b$, sein Fallraum für den Punkt D also $= FH = y - b$ sey, so dass wir in der Gleichung $\frac{u^2}{4g} = y$ ingl. $\frac{u^2}{4g} = (y - b)$ setzen müssen. Vereinigt man diesen Ausdruck mit dem oben gefundenen Werthe für ds, so ist, (weil $u = \frac{ds}{dt} = 2\sqrt{g(y-b)}$) $dt = \frac{dy\sqrt{2a}}{2\sqrt{g(y-b)(2a-y)}}$ und $dt\sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{dy}{\sqrt{((2a+b)y - 2ab - y^2)}}$. Nimmt man $y^2 - (2a+b)y$ für die zwey ersten Glieder eines Quadrats, so ist dieses Quadrat $y^2 - (2a+b)y + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(y\left(a + \frac{b}{2}\right)\right)^2$, welches wir $= z^2$ setzen, also $y - \left(a + \frac{b}{2}\right) = z$ oder auch weil $a + \frac{b}{2} >$ seyn kann als y, so setzen wir $\left(a + \frac{b}{2}\right) - y = z$, daher $+ dy = - dz$ und $- y^2 + (2a+b)y = - z^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2$ substituirt, so ist $dt\sqrt{\frac{2g}{a}} =$

$$\frac{-dz}{\sqrt{\left(\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 - 2ab - z^2\right)}} = \frac{-dz}{\sqrt{(a^2 - ab + \frac{b^2}{4} - z^2)}}$$

oder weil $a^2 - ab + \frac{b^2}{4} = f^2$ als vollkommenes Quadrat gesetzt werden kann, so ist $dt\sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{-dz}{\sqrt{(f^2 - z^2)}}$ oder $dt\sqrt{\frac{2g}{a}}$

$$= \frac{\frac{-dz}{f}}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{f^2}}} = \left(\frac{z}{f} = w,\ \frac{dz}{f} = dw,\ \frac{z^2}{f^2} = w^2\right) = \frac{-dw}{\sqrt{1 - w^2}},$$

also $t\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc. Cos}\, w + C =$

$$\text{Arc. Cos}\left(\frac{z}{f}\right) + C = \text{Arc. Cos}\left(\frac{\left(a + \frac{b}{2}\right) - y}{a - \frac{b}{2}}\right) + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, so sage: weil wir annahmen, dass die Bewegung bei B anfängt, $t = o$ wenn $y = b$

ist, so ist $o = \text{Arc.}\cos\left(\frac{a+\frac{b}{2}-b}{a-\frac{b}{2}}\right) + C$, also $C = -\text{Arc. Cos}\,\frac{\left(a-\frac{b}{2}\right)}{a-\frac{b}{2}}$, oder weil $\frac{a-\frac{b}{2}}{a-\frac{b}{2}} = 1$, so ist $\text{A. Cos}\, 1 = o$, folglich ist allgemein $t.\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc.Cos}\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)$.

Was ist $a+\frac{b}{2}-y$? Es ist offenbar $FN = EN - EF = 2a - b$, folglich $FO = a - \frac{b}{2}$ und $OH = FO - FH = a - \frac{b}{2} - (y - b)$, also $OH = a + \frac{b}{2} - y$. Nennt man den Winkel $IOH = \varphi$ *), so ist $1 : \cos\varphi = IO : OH = a - \frac{b}{2} : a + \frac{b}{2} - y$, folglich $\cos\varphi = \left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)$, oder $\varphi = \text{Arc.}\cos\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)$, folglich $t = \varphi\sqrt{\frac{a}{2g}}$. Frägt man um die Zeit, wenn der Körper von B nach N gekommen seyn wird, so ist in dem Falle $\varphi = \pi$ folglich $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$.

§. IV.

Frägt man wie bald der Körper von B nach N kömmt (Taf. I. Fig. 4.), so ist die Antwort $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, eben so von B' nach N, ist $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, weil also bei der Bestimmung der Zeit b ganz aus der Rechnung wegfiel, so sieht man daraus die merkwürdige Eigenschaft: dass, wenn N der tiefste Punkt der gemeinen Cykloide ABB'B''N ist, die-

*) Dieses φ ist ganz und gar nicht dasselbe als vorhin, sondern der Winkel IOF, der so bestimmt wird: ziehe durch den Auslaufspunkt B und durch den Punkt D des Anlangens die auf EN senkrechten BF, DIH halbire FN oder $2a - b$ in O, beschreibe den Kreis FIN cum radio $\frac{2a-b}{2}$, ziehe endlich OI; das b ist nur in so ferne veränderlich, als der Auslaufpunkt nicht allemal derselbe bleibt.

selbe Zeit T angewendet werde, damit ein schwerer Körper (ohne Nebenwiderstand) von B oder von B′, oder von B″, ... auslaufend, in N anlange. Dass dies nur von einerlei gemeiner Cykloide wahr sey, sieht man daraus, dass t einen andern Werth erhält, wenn a verändert wird.

§. V.

Da wir allgemein für jede Kurve (§. II.) gefunden haben, dass in jedem Punkte $u = \sqrt{4g \cdot y}$, wenn y die der Tangentialgeschwindigkeit u entsprechende senkrechte Fallhöhe, die (§. II.) zugleich Ordinate war, und weil hier immer für den Punkt N, (Taf. I. Fig. 5.) diese Fallhöhe in $N = 2a - b$, so ist (wenn der Körper aus der Ruhe von einem Punkte B der gemeinen Cykloide A B B′ ausgelaufen, welcher von Aa um b senkrecht entfernt ist):

a) in N. . . . $u = \sqrt{4g(2a - b)}$ die grösste Geschwindigkeit nach NL, womit der Körper nicht ruhet, sondern da er nur nach Nb laufen kann, seine Bewegung nach Nb fortsetzt.

b) in B ist $u = \sqrt{4g(y - b)}$ *), und, wenn er von der andern Seite steigt, ist in b, $u = \sqrt{4g(Y - b)}$ (ax); ist nun $y - b = Y - b$ oder $y = Y$, so hat der Körper in B und in b dieselben Endesgeschwindigkeiten, also in den vom tiefsten Punkt N gleich weit entfernten (die Entfernung von N nach n gemessen) Punkten B, b, B′, b′, gleiche Geschwindigkeiten. Ist der Körper von B mit Geschwindigkeit $= o$ ausgelaufen, so ist in b seine Geschwindigkeit abermals $= o$, also steigt er auf der Seite Na nur bis b; das wäre auch wahr, wenn ANa keine Cykloide sondern eine andere Kurve wäre.

*) Es ist für den Punkt B. . . $AD = x$, $DB = y$, also die Fallhöhe des von B ausgelaufenen Körpers der in B angekommen $= y - b$. $Ad = X$, $db = Y$, also $sb = Y - b$. Nenne ich h (Taf. I. Fig. 6.) allgemein die Fallhöhe, die in einer Kurven einem Punkte in Bezug des Auslaufpunktes (von Bewegung $= o$) entspricht, so ist das Gesetz $u = \sqrt{4g \cdot h}$ so allgemein, dass es während der ganzen Bewegung Statt findet, es sey der Körper auf der Seite A oder auf jener B der Kurven; ist also der Körper in b, so ist seine Fallhöhe $= Y - b$, also $u = \sqrt{4g(Y - b)}$.

§. VI.

Es ist (§. III.) gezeigt worden, dass die Durchlaufzeit für jeden gemein cykloidischen Bogen vom Auslaufpunkte bis zum tiefsten Punkt $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$. Frage ich nach der Dauer T einer Oscillation, d. i. wie bald der Körper von B nach b kommt, wenn er von B aus dem Ruhepunkte ausläuft; so ist der Winkel $\varphi = IFNiI = 2\pi$, folglich $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}} = 2t = \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$ und $T : \sqrt{\frac{2a}{g}} = \pi : 1$, d. i. die Oscillationszeit eines in einer gemeinen Cykloide durch seine blosse Schwere ohne Nebenwiderstand bewegten Körpers verhält sich zu der Zeit, in der der Körper durch den Durchmesser 2a des die Cykloide erzeugenden Kreises durch seine blosse Schwere ohne Nebenwiderstand aus dem Ruhestande senkrecht herabfiele, $= \pi : 1$. Diese Wahrheiten hat Huygens in Holland zuerst entdeckt. Dass ein Körper in der Zeit $\sqrt{\frac{2a}{g}}$ über den Raum 2a durch seine Schwere herabläuft, ist aus der Elementarmechanik bekannt; denn allgemein $s = t^2 \cdot g$, $t^2 = \frac{s}{g}$, $t = \sqrt{\frac{s}{g}}$ wenn der Fallraum und s und t zugleich Null werden. Bei einerlei gemeiner Cykloide sind also auch alle Oscillationszeiten einander gleich.

§. VII.

Es ist bekannt, dass sich die gemeine Cykloide selbst entwickle, dass nemlich die gemeine Cykloide als Evolute genommen, eine Evolute gibt, die abermals eine gemeine Cykloide von demselben a oder Radhalbmesser ist, wie sich (A. S. 974 e.) leicht zeigen lässt. Wenn ich in der Folge Cykloide ohne Beisatz sage, so verstehe ich darunter allemal die gemeine Cykloide. Wollte man also, dass ein im Punkte A (Taf. I. Fig. 7.) aufgehangenes Pendel die Cykloide BNE beschreibe, so müsste man von A an auf beiden Seiten 2 physische Cykloidalbögen befestigen, so dass AB und AE ganz gleich wären BN und NE, wodurch BN und NE dieselben Cykloidalbögen wären als AB und AE, und wenn der Faden AN um AB und AE sich aufwindet, er die BNE beschriebe. BNE eine ganze Cykloide, nemlich BN die Basis, worauf das Rad vom Halbmesser a laufend, die BNE beschreibt, also $FN = 2a$, aber $BS = ER = FN$, also $AN = 2a + 2a = 4a$. Man sieht von selbst dass die Länge (L) dieses Pendels $AI + IN = 2a + 2a = 4a$ gleich (dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises) sey: Weil wir überhaupt gefunden haben, dass $T = \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, so wird auch hier dasselbe Statt finden, folglich jede

Oscillationszeit $T = \pi \sqrt{\frac{4a}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$, daher $T : \sqrt{\frac{L}{2g}} = \pi : 1$, d. i. die Schwingungs- oder Oscillationszeit eines solchen Pendels verhält sich zu der Zeit, in welcher das Pendelgewicht blos vermöge der Schwerkraft durch seine halbe Länge gefallen wäre, $= \pi : 1$, dass diese Oscillationszeit T dieselbe für den Bogen BNE oder jeden andern B′NE′ ist bekannt (§. V.).

§. VIII.

Für zwey solche Cykloidalpunkte von verschiedener Länge L, L′, wäre $T : T' = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}} : \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}L'}{g}}$, folglich auch $T : T' = \sqrt{L} : \sqrt{L'}$, d. i. die Schwingungszeiten verschiedener Cykloidalpendeln verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen.

§. IX.

Durch $T = \pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$ kann man sehr leicht den Raum g bestimmen, mittelst eines Cykloidalpendels von bekannter Länge L; es ist nemlich $T^2 = \frac{\pi^2 . L}{2g}$ oder $2g. F^2 = \pi^2 L$, also $g = \frac{\pi^2 . L}{2 T^2}$, ... wo nemlich $T = 1$ ist, und L eine Länge $= 3{,}144$ Fuss in Wien hätte, demnach wäre der Fallraum g für die erste Sekunde des freien Falls von der Bewegung $= 0$ aus, in Wien $= g = \left(\frac{22}{7}\right)^2 . \left(\frac{3{,}144}{2.\ 1.}\right) = 15{,}507760$ wiener Fuss; auf ähnliche Art lässt sich g für jeden Standpunkt der Erde finden.

§. X.

Findet man auf diese Art an verschiedenen Orten der Erde das g verschieden, so ist die Fallhöhe in der ersten Sekunde auf dem Ruhestande, folglich die Schwerkraft verschieden; heissen diese Fallräume g und g′, in einerlei Längenmaass und auf dieselbe erste Sekunde bezogen, so ist, da beide durch eine gleichförmige Beschleunigung zurückgelegt werden, die Kraft der Schwere an diesen beiden Orten dem Fallraum g und g′ proportional, folglich verhalten sich die Schwere der Drucke auf fixe Punkte an verschiedenen Orten der Erde bei gleichen Schwingungszeiten wie die Länge der hiezu erforderlichen Cykloidalpendeln; und bei gleichen Längen der Cykloidalpendeln umgekehrt wie die Quadrate ihrer Schwingungszeiten in diesen Orten.

§. XI.

Es hat nicht blos die Cykloide die Eigenschaft, dass alle ihre durch Horizontallinien begrenzten Kurvenstücke unter diesen Horizontallinien in gleichen Zeiten beschrieben werden, sondern es gibt unendlich viele Kurven von dieser Eigenschaft: denn wir haben diese Eigenschaft aus der Gleichung

$$t.\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc. cos}\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)$$

gefolgert. Es muss also diese Eigenschaft jeder Kurven zukommen, wo

$$t.\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc. cos.}\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)$$

Statt findet.

Wird $y=2a$ so wird in diesem Falle $t\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc. cos}\,(-1) = \pi$ folglich *constant* ohne mehr von b abzuhängen, dieses findet aber auch bei einer solchen Linie Statt, wo z. B.

$$t\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc. cos}\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right) + B\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)^2 +$$

$$C\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)^3 \ldots\ldots$$ denn da durch die Division das b immer wegfällt, wenn $y = 2a$ gesesetzt wird, so bleibt immer $t.\sqrt{\frac{2g}{a}}$ = einer *Constante* übrig.

§. XII.

Man kann sich auch Gleichungen für dergleichen Linien ableiten, denn wäre z. B. $t\frac{\sqrt{2g}}{a} = f(\lambda) = \cos^m\lambda$, wo $\cos\lambda = \left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-b}\right)$, so hat auch diese Linie die geforderte Eigenschaft, weil, wenn $y=2a$, $\cos\lambda = 1$ folglich $\cos^m\lambda$ eine konstante Grösse ist. Die Gleichung selbst findet man so: Es ist allgemein in jeder Kurve $\frac{ds}{dt} = v = 2\sqrt{g(y-b)}$ und folglich $dt = \frac{ds}{2\sqrt{g(y-b)}}$. Es ist aber auch aus der angenommenen Gleichung $dt = \frac{-m.\cos^{m-1}\lambda.\,d\lambda.\,\sin\lambda}{\sqrt{\frac{2g}{a}}}$ und $-d\lambda\sin\lambda = \frac{st}{\sqrt{g(y-b)}} =$

$$\frac{-dy}{a-\frac{b}{2}}, \text{ Subr. } dt = \frac{ds}{2\sqrt{g(y-b)}} = m\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)\frac{dy}{\left(a-\frac{b}{2}\right)}\sqrt{\frac{a}{2g}}.\ \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(y-b)}} =$$

$$= m\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right)^{m-1}\frac{dy}{a-\frac{b}{2}}\sqrt{a}.$$

Eine Gleichung, die integrirt die Gleichung für die geforderte Kurve geben wird.

§. XIII.

Aufgabe. Die Schwungzeit eines Pendels zu bestimmen, das einen Kreisbogen beschreibt (S. Euler.)

Aufl. Es sey die ganze Höhe, auf welche das Pendel über den niedrigsten Punkt D gehoben wird, wenn es in B ist, $ND=a$, die Höhe GD, um welche es in F über dem niedrigsten Punkte D steht $GD=x$, $BF=S$, und $Fo=ds$, folglich $Gp = -dx$. Denn wenn S und ds zunimmt, so nimmt x und dx ab, und eben so $FR = -dy$ wenn $FG=y$ ist. (Taf. I. Fig. 9.) Es sey ferner der Körper in B aus dem Ruhestande blos durch Schwere nach F gelaufen, so ist (§. II.) die Tangential-Endesgeschwindigkeit v, die der Körper in dem Punkte F hat, $v=2\sqrt{g(a-x)}$, folglich

$ds = dt . v = 2 dt \sqrt{g(a-x)}$ folglich $\frac{ds}{2\sqrt{g(a-x)}} = dt$. Man kann ds finden, entweder [r=*radius* des Kreises BDE], wenn man $y^2 = 2rx - x^2$ differenzirt, u. s. w. oder aus den Dreiecken $FRo \backsim AFG$. Es ist $ds : - dx = r : y$, folglich $ds = - \frac{rdx}{y} = \frac{-rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, substituirt $dt = \frac{-rdx}{2\sqrt{g(a-x)(2r-x)x}}$. Diese Formel enthält eine irrationale Funktion, wo die hinter dem Wurzelzeichen stehende Funktion des 3ten Grades ist, wovon also das Integrale sehr beschwerlich zu suchen wäre. Diesem abzuhelfen, so bringe man einen von den Faktoren im Nenner mit dem Exponenten $- \frac{1}{2}$ im Zähler, und verwandle ihn in eine fallende Reihe; nun ist die Frage welchen? Den Faktor $x^{-\frac{1}{2}}$ kann man offenbar nicht so verwandeln; mit $(a-x)^{-\frac{1}{2}}$ gienge es zwar [man erhielte nemlich $(a - x)^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} x + \frac{3}{8} . a^{-\frac{5}{2}} x^2 .$ (A. S. 47) $= \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2} . x}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{3}{8} . x^3}{a^{\frac{5}{2}}} + \ldots\ldots$ also für $x = a$ wäre die Reihe $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \ldots = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \ldots\ldots\right)$] allein weil x von a wenig differirt, und manchmal sogar $x = a$ wird, so würde diese Reihe zwar in einigen Fällen genugsam, in einigen aber sehr wenig convergiren. Der Faktor $(2r - x)^{-\frac{1}{2}}$ hat aber die Eigenschaft, dass x immer um ein Beträchtliches kleiner ist als $2r$, folglich $(2r)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ immer eine fallende Reihe geben müsse. Wan setze also $dt =$

$$\frac{-rdr\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2gr . x(a-x)}} = \frac{-rdx}{2\sqrt{2grx(a-x)}}\left(1 + \frac{x}{4r} + \frac{3x^2}{32 r^2} + \ldots .\right);$$ also

$$t = \frac{r}{2\sqrt{2gr}} \int \frac{-dx}{x(a-x)} + \frac{r}{2\sqrt{2gr}} \int \frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} . \frac{x}{4r} + \frac{r}{2\sqrt{2gr}} \int \frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} . \frac{3x^2}{32 . r^2}$$

$+ \ldots .$ da aber $\frac{3x^2}{32 . r^2}$ gegen $\frac{x}{4r}$ sehr klein ist, so kann

$dt = \frac{-rdx}{2\sqrt{2grx(a-x)}}\left(1 + \frac{x}{4r}\right)$ gesetzt werden, also $t = \frac{r}{2\sqrt{2gr}} \int \frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}}$

$$+ \frac{r}{2\sqrt{2gr}} \int \frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} . \frac{x}{4r} .$$

Nun ist

I. $\int \frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} = \int \frac{-dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, diess erhält man wenn man das Quadrat ergänzt; setzt man nemlich $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = z^2$ oder $x - \frac{1}{2}a = z$, so ist $ax - x^2 = \left(\frac{a^2}{4} - z^2\right)$, folglich $\int \frac{-dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \int \frac{-dz}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - z^2\right)}}$

$$\int \frac{-\frac{dz}{\frac{a}{2}}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{\frac{a^2}{4}}}} = \left(\frac{z}{\frac{a}{2}} = \gamma, \frac{z^2}{\frac{a^2}{4}} = \gamma^2, \frac{dz}{\frac{a}{2}} = d\gamma\right) =$$

$$\int \frac{-d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \text{Arc. cos } \gamma = \text{Arc. cos } \frac{z}{\frac{a}{2}} = \ldots\ldots \text{ Arc. cos } \frac{z}{\frac{a}{2}} =$$

Arc. cos $\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)$; setzt man Arc. cos $\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = \varphi$, so ist $\cos \varphi = \frac{x - \frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}$ und $\int \frac{-dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \varphi$.

II. Es ist also auch $x = \frac{1}{2}a + \cos \varphi$, und $a - x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \varphi$ und $-\frac{1}{2}a\,d\varphi.\ \text{Sin}\ \varphi = dx$ daher:

$$\int \left(\frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} \cdot \frac{x}{4r}\right) = \int \left(\frac{+\frac{1}{2}a\,d\varphi\ \text{Sin}\ \varphi\ (\frac{1}{2}a + \frac{a}{2}\cos\varphi)}{4r\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\text{Cos}^2\varphi\right)}}\right) =$$

$$\frac{1}{4r} \int \left(\frac{\frac{a^2}{4}\ \text{Sin}\ \varphi.\ d\varphi}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\text{Cos}^2\varphi}} + \frac{\frac{a^2}{4}\ \text{Cos}\ \varphi.\ d\varphi.\ \text{Sin}\varphi}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\ \text{Cos}^2\varphi}}\right)$$

$$= \frac{1}{4r}\int\left(\frac{\frac{a}{2}\,\text{Sin}\,\varphi\,d\,\varphi}{\sqrt{1-\text{Cos}^2\varphi}} + \frac{\frac{a}{2}\,\text{Cos}\,\varphi\,.\,d\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi}{\sqrt{1-\text{Cos}^2\varphi}}\right) =$$

$$\frac{a}{2.4.r}\int\left(\frac{d\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Sin}\,\varphi} + \frac{\text{Cos}\,\varphi\,.\,d\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Sin}\,\varphi}\right) =$$

$$\frac{a}{2.\,4.\,r}\left(\int d\varphi + \int d\varphi\,\text{Cos}\,\varphi\right) = \frac{a}{2.4.r}(\varphi + \text{Sin}\,\varphi) =$$

$$\frac{\frac{a}{2}\varphi}{4r} + \frac{\frac{a}{2}\,\text{Sin}\,\varphi}{4r};$$ es ist demnach:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{2gr}}\varphi + \frac{r}{2\sqrt{2gr}}\left(\frac{\frac{a}{2}\varphi}{4r} + \frac{\frac{a}{2}\,\text{Sin}\,\varphi}{4r}\right) =$$

$$\frac{r}{2\sqrt{2gr}}\left(\varphi + \frac{\frac{a}{2}\varphi}{4r} + \frac{\frac{a}{2}\,\text{Sin}\,\varphi}{4r}\right) = \ldots\ldots$$

$$= t = \sqrt{\left(\frac{r}{8g}\right)}\left(\varphi\left(1 + \frac{a}{8r}\right) + \frac{a}{8r}\,\text{Sin}\,\varphi\right) + C.$$

Man sieht aber, dass $C = o$ ist; den für $t = o$ ist $x = a$, also $\varphi =$

$$\text{Arc. cos}\left(\frac{a - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = \text{Arc. Cos.}\left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = \text{Arc. cos}\ 1 = o,$$ also ist $o =$

$$\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(o\left(1 + \frac{a}{8r}\right) + \frac{a}{8.r}.\ \text{Sin}\ o\right) + C = \sqrt{\frac{r}{8g}}\,(o + o) = o,$$

also $C = o$. Fragt man nun um die Zeiten t', binnen welchen der Körper von B nach D kömmt, alle diese Zeiten von jenem Augenblicke an gezählt, wo er von B das erstemal auszulaufen anfängt, so ist für diese Zeiten t' allemal $x = o$, also $\varphi =$

$$\text{Arc. cos}\left(\frac{o - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = \text{Arc. cos}\,(1 - 1) = (n - 1)\,\pi,$$ wo n jede gerade Zahl, also

für die Zeiten t' ist $\varphi = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi; \ldots\ldots$ also sind diese Zeiten t' =

$$\sqrt{\frac{r}{8g}}\left((n-1)\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right)+\frac{a}{8r}\,\text{Sin}\,(n-1)\pi\right) =$$

$$\sqrt{\frac{r}{8g}}\left((n-1)\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right)\right) \text{ oder}$$

$$t' = r.\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = 3\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = 5\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) =$$

$$3\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = 9\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = \ldots\ldots$$

Frägt man um die Zeiten T [von demselben Zeitpunkte an als t' gezählt] binnen welchen der Körper von B bis, von B bis E und wieder bis B und wieder bis E und wieder bis B gelangt, so ist für alle diese Zeiten T das x = a, also

$$\varphi = \text{Arc. cos}\left(\frac{a-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = \text{Arc. cos}\,(+1) = n\,\pi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi, \ldots\ldots$$

also $T = \sqrt{\frac{r}{8g}}\left(n\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right)+\frac{a}{8r}\,\text{Sin}\,n\,\pi\right) = \sqrt{\frac{r}{8g}}\left(n\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right)\right)$, also

$$T = 0\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = 2\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = 4\sqrt{\frac{r}{8g}}\cdot\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) =$$

$6\sqrt{\frac{r}{8g}}\cdot\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = \ldots\ldots$ Nennen wir $\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\left(1+\frac{a}{8r}\right) = N$, so ist die Zeit der ersten Schwingung um den Raum B B = 0, T = 0. N, die Zeit der ersten Schwingung von B bis E, T = 2 N, die Zeit der ersten 2 Schwingungen B bis E und E bis B, T = 4 N, ... also die Zeit der ersten Schwingung von B bis E = 2 N, die Zeit der zweiten Schwingung von E bis B = 4 N — 2 N = 2 N; die Zeit der dritten Schwingung von B bis E = 6N — 4 N = 2 N, eben so ist die Zeit der ersten halben Schwingung von B bis D, = 1 . N, die Zeit der ersten 3 halben Schwingungen von B bis D, D bis E, E bis D = 3N, ... also die Zeit der ersten halben Schwingung von B bis D = 1 N, die Zeit der zweiten halben Schwingung von B bis D = 2 N — 1 N = N, die Zeit der dritten halben Schwingung von E bis D = 3 N — 2 N = N, ... also geschehen die Schwingungen von B bis D, von D bis E, von E bis D, von D bis B, von in den Zeiten N, N, N, ...

oder $\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\,(1+\frac{a}{8r})$ $\sqrt{\frac{r}{8g}}\cdot\pi\,(1+\frac{a}{8g})$ wir nennen daher: $\sqrt{\frac{r}{8g}}\cdot\pi\,(1+\frac{a}{8r})$ eine halbe und $2\sqrt{\frac{r}{8g}}\,\pi\,(1+\frac{a}{8r})$ eine ganze Schwingungszeit unsers auf die Höhe a gehobenen Kreispendels vom *radius* = r.

Man sieht 1) dass die Schwingungszeit $2\sqrt{\frac{r}{8g}}\cdot\pi\,(1+\frac{a}{8r})$ von 2 Gliedern abhängt, deren erstes aber jenen für die Cykloide vollkommen gleich kömmt, es ist nemlich $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{8g}} + 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{8g}}\cdot\frac{a}{8r}$ = [wenn die Länge r des Pendels = L genannt wird] $= 2\,\pi\sqrt{\frac{\frac{L}{2}}{4g}} + 2\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{8^3\,gr}}$ oder $T = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\frac{L}{2}}{g}} + 2\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{8^3\,gr}}$; wäre B D E eine Cykloide, so wäre die Schwingungszeit von B bis $E = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}}$ (§. VII.), wo L = A D. 2) Weil das 2te Glied positiv ist, so ist die Schwingungszeit beim Kreispendel etwas grösser bei derselben Länge L, nemlich um $2\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{8^3 g.L}} + \ldots\ldots$, nemlich + den sehr kleinen Gliedern, die hier ständen, wenn man die Reihe $1 + \frac{x}{4r} + \frac{3x^2}{32.r^2} + \ldots\ldots$ über $\frac{x}{4r}$ fortgesetzt hätte.

§. XIV.

Wie viel beträgt nun diese Differenz?

Auflösung. Diese Differenz hängt von dem Gliede $\pi\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)}\frac{a}{8r}$ ab, und dessen seine Grösse wieder von a. Weil aber a desto grösser wird, je grösser der Bogen DB ist, den das Pendel beschreibt, weil also a von der Grösse des Bogens abhängt so wollen wir uns die Höhe a durch ihren entsprechenden Bogen ausdrücken.

Es sey also der sehr kleine, und einer geraden Linie also der Sehne DB fast gleichkommende Kreisbogen DB, (Taf. I. Fig. 10.) um den das Pendel AB gehoben wird, = b, DN = a, so ist a: b = b: 2r folglich $\frac{b^2}{2r} = a$. Diess substituirt, so ist $T = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}} + \pi\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)} \cdot \frac{b^2}{16r^2}$. Wird nun b so klein angenommen, dass $\pi\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{b^2}{16 \cdot r^2}$ gegen $\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ als verschieden betrachtet werden kann, so ist $T = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}}$, also dieselbe Schwingungszeit, als ob DB ein Cykloidalbogen wäre, welches auch ganz natürlich ist, da der Bogen DB, wenn er sehr klein ist, vom Cykloidalbogen, der (§. VI.) durch den Faden OD = L entsteht, fast nicht abweicht; nehmen wir in diesem Falle das in Sekunden ausgedrückte T = 1 an, substituiren für g = 15, 507760 Wiener Fuss (§. IX.), so folgt aus $T = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ oder $1 = 3, 14 \ldots\ldots \sqrt{\frac{r}{2 \cdot 15,5 \ldots}}$, r = 3, 14 Wiener Fuss oder = 452,739 Wiener Linien, welches die Länge eines Sekundenpendels ist, nemlich eines solchen Kreispendels, bei dem jede Schwingung eine Sekunde in Wien dauert, wenn die Schwingungsbogen sehr klein sind. In diesem Falle, wo $\pi\sqrt{\frac{r}{2g}} = 1$, folgt, streng genommen, $T = 1 + 1 \cdot \frac{b^2}{16 r^2} = 1 + \left(\frac{b}{4 r}\right)^2$. Man sieht, dass je grösser der Bogen b wird, die Schläge oder Schwingungszeiten desto länger werden. Wollte man die eigentliche Verspätung gegen ein genaues Cykloidal-Sekundenpendel erfahren, so müsste man für eine gegebene Länge des Bogens, z. B. b = r″ die Schwingungszeit berechnen, und 1 Sekunde davon abziehen, diess würde bei einem kleinen Werthe von b, wie er bei den wirklichen Kreispendeln sehr klein ist, sehr klein ausfallen. Man wird also diese Verspätung besser erfahren, wenn man fragt, um wie viel Schläge wird ein Kreispendel von der Länge 452‴, 739 in einem Tage weniger machen als ein gleich grosses Cykloidenpendel (in Wiener Maass und loco Wien)? Das Cykloiden-Sekundenpendel macht 86400 Schläge in einem Tage von 24 Stunden, und das Kreispendel von derselben Länge macht $\frac{86400}{T}$ nach der Proportion: eine

Schwingung geschieht in T Sekunden, 86400 Schwingungen, in wie viel Sekunden geschehen sie?

$$1 : T = 86400 : x, \; x = \frac{86400}{T}, \text{ also in } \frac{86400}{T} \text{ Sekunden} = \frac{86400}{1 + \left(\frac{b}{4r}\right)^2} \text{ Sekunden.}$$

Zieht man diese Anzahl Sekunden von jener ab, so gibt die Verspätung des Kreispendels um d Sekunden, $d = 86400 - \frac{86400}{1 + \left(\frac{b}{4r}\right)^2} = \frac{86400 \left(\frac{b}{4r}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{4r}\right)^2}$; hat nemlich besagtes Kreispendel in loco Wien während 86400 Pendelschläge oder ganzen Schwingungen im Durchschnitt den halben Schwingungsbogen b beschrieben, so ist noch 86400 solchen Pendelschlägen die verstrichene Zeit nicht = 86400 Sekunden oder 24 Stunden, sondern es gehen auf 24 Stunden noch $\frac{86400 \left(\frac{b}{4r}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{4r}\right)^2}$ oder $\frac{86400\, b^2}{16 r^2 + b^2}$ Sekunden ab.

Aus dieser Formel lässt sich für jede Länge b des Bogens die Verspätung des Kreispendels von r = dem L des Sekunden-Cykloidalpendels, so wie für jede gegebene Verspätung des Kreispendels, die Länge des Schwungs bei selbigem angeben. Aus dieser Ursache sind bei den Kreispendeln der astronomischen Uhren immer Skalen angebracht, an denen man die Länge b des Bogens messen kann. Man thut am besten, wenn man sich bei einer solchen Skale nicht die Bögen b, sondern die Verspätungen d zu den berechneten Punkten hinzuschreibt, weil diess dann keiner Berechnung erst bedarf.

Beispiel. Wie gross ist der Bogen b beim Kreispendel, wo r = dem L des Sekunden-Cykloidalpendels, wenn sich das Pendel um 1, 2, 3, 4, ... Sekunden in einem Tage verspätet?

Auflösung. Es ist aus der obern Gleichung $b = 4r\sqrt{\frac{d}{(86400 - d)}}$, wo man statt d nur seinen Werth hinzusetzen braucht. Für d = 1 ist $b = 4r\sqrt{\frac{1}{86399}} = \frac{4 \cdot 452''',739}{293,9} = 6, 16'''$, also 6 Linien.

Weil das d nie gross ist, so bleibt immer $\sqrt{86400} - d = 293,9$ folglich
$b = \frac{4r\sqrt{d}}{293,9} = 6,16.\sqrt{d}.$ Daher

Länge des Bogens in Linien.	Verspätung in Sekunden nach 24 Stunden.	Ganze Länge des Schwungs in Linien.
$b = 6,16.\sqrt{2} = 8,68.$	. . 2 . . .	. . 17''', 36 . .
$b = 6,16\sqrt{3} = 10,65$	. . 2 . . .	. . 21''', 31 . .
$b = 6,16\sqrt{4} = 12,32$	. . 4 . . .	. . 24''', 64 . .
$b = 6,16$	. . 1 . . .	. . 12, 32. . .

Man sieht daraus, dass diese Verspätungen durch den ungleichen Schlag der Uhr sehr wenig betragen, sich übrigens leicht korrigiren lassen, und folglich Kreispendeln bei Uhren so gut zu brauchen sind wie Cykloidalpendeln, welche letztern sehr schwer zu konstruiren sind.

§. XV.

Nun wollen wir von den Trägheitsmomenten und von Schwerpunkten sprechen. Sind mehrere Körper (Taf. I. Fig. 11.) A, B, C, ... mit einander verbunden, dass keiner für sich allein sondern alle zugleich um eine Axe E sich in auf Axe E senkrechten Kreisen bewegen müssen, sind nemlich A, B, C, . . . gegen einander in unbeugsamen unverschiebbaren Zusammenhange, so ist offenbar, dass ihre relativen Geschwindigkeiten um der Axe E ihren senkrechten Entfernungen von E proportional seyen. Um die absoluten Geschwindigkeiten von A, B, C, . . . um E zu bestimmen, braucht man daher nur ihre senkrechten Entfernungen von der Axe E und die Geschwindigkeit eines einzigen Punkts dieses Systems von Körpern zu kennen.

Diesen Punkt nehme man irgendwo auf der auf Axe E senkrechten Entfernung Ee = 1 an, und nenne seine Geschwindigkeit w, so ist w die Winkelgeschwindigkeit dieses Systems. Man braucht nur den Bogen en oder Winkel eEn zu kennen, den der Punkt e in der Zeiteinheit gleichförmig zurücklegt, so ist man dann im Stande die absoluten Geschwindigkeiten der übrigen Punkte zu bestimmen. Ist nemlich AE = a, Bb = b, CE = c, ... so ist Geschwindigkeit von A = a. w, Geschwindigkeit B = b. w, Geschwindigkeit C = c. w, nemlich a. w, b. w, c. w, in der Zeiteinheit von A, B, C, mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufene Räume, oder wenn es Endesgeschwindig-

keiten zu Ende der Zeit t sind, aw, bw, cw, ... die in jeder folgenden Zeiteinheit von A, B, C, zu durchlaufenden Räume, die A, B, C, . . . blos ihrer Trägheit überlassen durchlaufen würden.

§. XVI.

Wäre eine Kraft P (P Druckgrösse der Kraft auf einen fixen Punkt) auf der senkrechten Entfernung von der Umdrehungsaxe E, (man stelle sich die Axe auf der Ebene des Papiers ⊥ vor,) EP = p senkrecht auf AE (Taf. I. Fig. 12.) angebracht, so ist diess eben so viel, als ob eine Kraft K in A (EA = a) senkrecht auf AE angebracht wäre, die $= \frac{p.\,P}{a}$ wäre *). Sey nun in A ein Körper angebracht von Gewicht = A, so wirkt bey der Drehung des Körpers A um E die Kraft K unmittelbar ins Gewicht A, nach Tangente des Kreises den A beschreibt, also beständig nach der Bahn die A beschreibt **).

*) K Druckgrösse dieser Kraft K auf fixen Punkt. Diess ist aus den ersten Grundsätzen der Elementarstatik, namentlich des mathematischen Hebels, bekannt.

**) Hier wird die Kraft P in P also auch deren gleichgeltende K — $\frac{p.\,P}{a}$ in A so angenommen, dass immer auf EA senkrecht gewirkt werde, wenn auch EA sich um E dreht, die Kraft läuft nemlich mit herum, wie z. B. bei einer Kurbel die Hand mit herum läuft; es ist also $\frac{2g.\,k}{A}$ dt oder $2g.\,\frac{p.\,P}{a.\,A}\,dt = dv$, wenn v Endesgeschwindigkeit nach Tangente des Kreises von *radius* a zu Ende der Zeit t; heisst die Endesgeschwindigkeit des Punktes e (wenn Ee = 1) = w, welche die Endeswinkelgeschwindigkeit, die wir kurz Winkelgeschwindigkeit nennen wollen, ist, so ist dv : dw = a : 1, nemlich der Zuwachs an Geschwindigkeit des Punktes A zu jener des Punktes e während dt wie a : 1, also $dw = \frac{dv}{a}$ oder $dw = \frac{2g\,p.\,P}{a.^2\,A}\,dt$ oder $\frac{p.\,P}{a.^2\,A} = \frac{dw}{2g.\,dt}$. Hier kann P als veränderlich angenommen werden, wenn nur P die auf AE senkrechte Kraft (ihrer Druckgrösse nach auf einen fixen Punkt gemessen) während dt bedeutet. Diess wäre die Grundgleichung für die Winkelgeschwindigkeit, wo nur ein Körper von Gewicht A durch P zu bewegen. Hier wie in folgendem ist allemal vorausgesetzt, dass das Gewicht des bewegten Körpers (oder die Gewichte der bewegten Körper) zur Bewegung als Kraft (oder als Kräfte) nichts beiträgt (oder beitragen); solche Gewichte bestimmen nur in so ferne die Bewegungen der Körper, denen sie entsprechen, als eine Kraft sich in eine grössere oder kleinere Masse zu theilen hat, also die beschleunigenden Kräfte dieser trägen Massen hiedurch bestimmt sind.

§. XVII.

Wären aber durch die auf EA immer senkrecht wirkende Kraft P, welche auf der senkrechten Entfernung p von der Axe E angebracht ist, mehrere Gewichte A, B, C, ... auf verschiedenen senkrechten Entfernungen a, b, c, ... von der Axe E in auf E senkrechten Kreisen zu bewegen, wie wäre da die Grundgleichung für die Winkelgeschwindigkeit w beschaffen?

Auflösung. Man denke sich die Kraft P in so viele Theile P′, P″, P‴, ... zertheilt als Gewichte A, B, C, ... zu bewegen sind, deren jeder auf die Bewegung eines Gewichts verwandt wird, und man bekommt durch vorige Betrachtungen vorige Formel.

Es wird I. in Bezug auf A seyn:

$\frac{P'.\, p}{a.\ A} = \frac{dv}{2g\, dt}$, II. in Bezug auf B seyn:

$\frac{P''.\, p}{b.\ B} = \frac{dv''}{2g\ dt}$, III. in Beziehung auf C seyn:

$\frac{P'''.\, p}{c.\ C} = \frac{dv'''}{2g\ dt}$, wo unter v′, v″, v‴ die von P dem Körper A, B, C, ... mitgetheilten Geschwindigkeiten zu Ende der Zeit t verstanden werden. Addirt man diese 3 Formeln, so erhält man

$$P' + P'' + P''' + \ldots\ldots = P = \frac{(A\,a.\ dv' + Bb.\, dv'' + Cc.\ dv''' + \ldots\ldots\ldots\ldots).}{2g\ p\ dt}$$

Reduzirt man ferner dv′, dv″, dv‴...... auf die in Zeit dt bestehenden Inkremente der Winkelgeschwindigkeiten, nemlich $dw' = \frac{dv'}{a}$, $dw'' = \frac{dv''}{b}$, $dw''' = \frac{dv'''}{c}$, so ist, da $dw' = dw'' = dw''' = \ldots\ldots$, welches wir durch dw ausdrücken

$$P.\ p = (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots.)\ \frac{dw}{2g\ dt} \text{ und } \frac{P.\ p}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots} = \frac{dw}{2g\ dt},$$

d. i. das statische Moment p. P der Kraft P verhält sich zur Summe der Trägheitsmomente $A\,a.^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots.$ oder durch P bewegende Gewichte um die Axe E wie das Winkelgeschwindigkeitsinkrementum während der Zeit dt zum Endesgeschwindigkeitsinkrementum 2g dt während derselben Zeit dt worum jene Endesgeschwindigkeit wachsen möchte, welche überhaupt ein schwerer Körper beim freien Fall zu Ende der Zeit t hat, wenn das Fallen an der Oberfläche der Erde blos durch die Schwerkraft erfolgt.

NB. Das Gewicht oder Kraft multiplizirt mit dem Quadrate seiner Endesgeschwindigkeit heisst Moment der Trägheit, wie aus der Elementarmechanik bestimmt ist.

§. XVIII.

Mochte dasselbe System von Gewichten nebst P noch eine andere Kraft Q *) auf der Entfernung q von E auf EA (Taf. I. Fig. 13.) senkrecht angebracht in Bewegung setzen, und man nennt blos von ihr herrührenden Winkelgeschwindigkeitszuwachs während dt = dw, so ist auf gleiche Art $\frac{Q\,q}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots} = \frac{dw}{2g\,dt}$, und auf gleiche Art wäre für eine dritte Kraft R, $\frac{R\,r}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots} = \frac{dw'}{2g\,dt}$ u. s. w. Addirt man diese Gleichungen, so ist $\frac{Pp + Qq + Rr + \ldots}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots} = \frac{dw + dw + dw'}{2g\,dt} \ldots$, d. i. die Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte P, Q, R, ... getheilt durch die Summe der Momente der Trägheit der einzelnen Gewichte A, B, C, ... ist gleich der Summe der von den einzelnen Kräften herrührenden Winkelgeschwindigkeitszuwächse während dt getheilt durch den Geschwindigkeitszuwachs der Schwere während dt. Setzt man dw, dw, dw' + ... = dW, so ist $\frac{Pp + Qq + Rr + \ldots}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots} = \frac{dW}{2g\,dt}$, wo dW das während dt erlangte Nullinkrementum von Winkelgeschwindigkeit ist, das durch die Gesammtwirkung der in den von Axe E senkrechten Entfernungen p, q, r, ... beständig senkrecht auf EA, oder nach besagten Kreistangenten wirkenden Kräfte P, Q, R, ... (Drucke auf fixe Punkte) dann entsteht, wenn die Gewichte A, B, C, ... in den senkrechten Entfernungen a, b, c, ... von der Axe E befestigt um E durch P, Q, R, ... in Kreisen getrieben werden. Bei geringem Nachdenken sieht man ein, dass diese wichtige Fundamentalformel der Winkelgeschwindigkeit wahr bleibt, wenn auch P, Q, R, p, q, r A, B, C,...., a, b, c,.... veränderlich, nur müssen P, Q, R, ... p, q, r, . . . A, B, C, . . . a, b, c, ... die während *dt*, nemlich zu Ende jeder Zeit t allgemein Statt findenden Werthe der Kräfte, ihrer statischen Abstände, deren Gewichte und deren Trägheitsabstände seyn. Heisst φ der Winkel, nemlich der Bogen *pro radio* = 1, den während der Zeit t die Massen A, B, C, ... um den ge-

*) Q eben so wie P Druckgrösse auf fixen Punkt; Q eben so wie P mit herumlaufend immer ⊥ EA angenommen, oder welches dasselbe für die Wirkung auf Bewegung ist, Q immer in einerlei senkrechter Entfernung q von der Axe E, und immer nach jenen Richtungen wirkend angenommen, welche die Tangenten des Kreises sind, welcher Kreis vom Radius = q senkrecht auf der Axe E angenommen ist.

meinschaftlichen Umdrehungspunkt E beschrieben haben, (alle können nur einerlei Winkel um E in einerlei Zeit beschreiben, wegen des unverschiebbaren Zusammenhangs der Massen A, B, C, ... unter einander,) heisst $d\varphi$ jener rektifizirte Bogen *pro radio* $= 1$, den die Endpunkte der aus E von a, b, c, ... abgeschnittenen Bögen $= 1$ mit der Endesgeschwindigkeit w während dt durchlaufen haben, so ist

$$\left((\S.\ 4.)\ v = \frac{ds}{dt} \text{ also } dt = \frac{ds}{v}\right)\ dt = \frac{d\varphi}{w}, \text{ also}$$

$$\frac{dw}{2g.\ dt} = \frac{\frac{dw}{}}{2g.\ \frac{d\varphi}{w}} = \frac{wdw}{2g.\ d\varphi};\ \text{es ist also}$$

$$\frac{wdw}{2g.\ d\varphi} = \frac{Pp + Qq + Rr + \ldots.}{Ab.^2 + Bb^2 + Cc^2 + \ldots}$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dass die Differenz der statischen Momente herzusetzen wäre, wo eine oder mehrere von den Kräften entgegen gesetzt wirken sollten. Das ist so zu verstehen: Massen können nur positive Werthe haben, ihre Abstände liessen sich wohl positiv und negativ denken, allein deren Quadrate bleiben desshalb doch immer $= +$, also $a^2 A$, $b^2 B$, $c^2 C$, ... sind immer positive Grössen, es ist also in obiger Formel der Nenner allemal von der Form $a^2 A + b^2 B + c^2 C + \ldots.$ wie aber: $a^2 A - b^2 B - c^2 C + d^2 D + \ldots.$, wohl aber der Zähler an der Form $pP - qQ + rR + sS \ldots.$ seyn; denn wenn die in der Figur punktirten Linien die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S, ... andeuten, so sind die statischen Momente von Q, P, S, ... von einerlei Zeichen, jenes von R von entgegen gesetzten Zeichen; sind also $pQ = +$, $qQ = +$, $sS = +$: so ist $rR = -$; denn Bestimmungen oder Drucke nach entgegen gesetzten Richtungen, als Grösse betrachtet, sind nothwendig entgegen gesetzte Grössen, und was sind statische Momente anders als die Grössen solcher Bestreben oder Bestimmungen.

Wir wollen das in diesem Paragraphe Gesagte auf eine noch allgemeinere Art aufstellen.

Es greifen die Räder von den Radien R und X in einander, so, wenn sich das Rad R um seine feste Axe E (Taf. II. Fig. 1.) um den Winkel φ dreht, jener A um K den Bogen $\frac{R}{X}\varphi$ beschreibt (φ, $\frac{R\varphi}{X}$ rektifizirte Bögen *pro radio* $= 1$ um die Axe E, K). Binnen Zeit t habe N beschrieben Bogen φ, zu Ende t Endesgeschwindigkeit von $N = w$, also w Winkelgeschwindigkeit um E zu Ende t, während dt beschreibt

$N = d\varphi$, und gewinnt an Geschwindigkeit $= dw$. Am Ende t haben A, B, D, G, M, die Endesgeschwindigkeiten: aw, bw, dw, $\frac{R}{X} \cdot gw$, $\frac{R}{X}\, mw$, also sind die Inkremente an Endesgeschwindigkeiten von A, B, C, D, G, M binnen $dt = adw$, bdw, ddw, $\frac{R}{X} \cdot gdw$, $\frac{R}{X} \cdot mdw$. Sey $P = P' + P'' + P''' + P'''' + P'''''$ die Kraft (ihrer Druckgrösse nach auf fixen Punkt), welche zu Ende t binnen dt nach der Tangente des Kreises von *radius* $= p$ um E wirkt, so dass P' blos allein die Masse A, P'' blos jene B, P''' blos jene D, P'''' blos jene G, und P''''' blos jene M beschleunige. Es ist demnach

$$adw = \frac{2g.\, pP'}{a.\, A} \cdot dt \text{ oder } \frac{a^2 A.\, dw}{2g.\, dt} = p.\, P', \text{ eben so}$$

$$\frac{b^2 B.\, dw}{2g.\, dt} = p.\, P'', \text{ eben so } \frac{d^2 D.\, dw}{2g.\, dt} = p.\, P''',$$

ferner ist $\frac{g.\, R\, dw}{X}$ (worum G an Endesgeschwindigkeit binnen dt zunimmt)

$$= \frac{2g.\, p.\, P''''}{R} \cdot \frac{X}{g.\, G} \cdot dt \text{ oder } \left(\frac{g.\, R}{X}\right)^2 \frac{G.\, dw}{2g.\, dt} = p.\, P''''$$

(worin g zweierlei Bedeutungen), eben so

$$\left(\frac{m.\, R}{X}\right)^2 \frac{M.\, dw}{2g.\, dt} = p.\, P''''', \text{ also ist}$$

$$\frac{dw}{2g.\, dt}\left(a^2 A + b^2 B + d^2 D + \left(\frac{g\, R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m\, R}{X}\right)^2 M\right) = p\,(P' + P'' + P''' + P'''' + P''''') \text{ oder}$$

$$\frac{dw}{2g.\, dt} = \frac{p.\, P}{a^2 A + b^2 B + d^2 D + \left(\frac{g\, R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m\, R}{X}\right)^2 M}.$$

Ist bei demselben Systeme von Massen nebst P an p ein Tangentialdruck Q am *radius* q um E angebracht, und heisst dw' das Inkrementum an Winkelgeschwindigkeit mittelst dieser Kraft allein und für sich binnen dt, so ist

$$\frac{dw'}{2g.\, dt} = \frac{q.\, Q}{a^2 A + b^2 B + d^2 D + \left(\frac{g.\, R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m\, R}{X}\right)^2 M} \text{ u. s. w. wären demnach}$$

mehrerere Tangentialdrucke P, Q, R, ... an den Radien p, q, r, ... um E angebracht, so wäre

$\frac{dw}{2g.\,dt} = \frac{pP}{a^2A + \ldots}$, $\frac{dw'}{2g.\,dt} = \frac{qQ}{a^2A + \ldots}$, $\frac{dw}{2g.\,dt} = \frac{rR}{a^2A + \ldots}$, u. s. w., also auch

$\frac{dw + dw' + dw'' + dw''' + \ldots}{2g.\,dt} = \frac{pP + qQ + rR + \ldots}{a^2A + b^2B + \ldots}$ oder wenn dW die binnen dt gesammte zugewachsene Winkelgeschwindigkeit durch P, Q, R, ... an den Radien p, q, r, ... ausdrückt:

$$\frac{dW}{2g\ dt} = \frac{pP + qQ + rR + \ldots\ldots}{a^2A + b^2B + d^2D + \left(\frac{g.\ R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m\ R}{X}\right)^2 M}$$

Es ist W die gesammte Winkelgeschwindigkeit um E, oder die gesammte Endesgeschwindigkeit des Punktes N zu Ende der Zeit t durch Gesammtwirkung von P, Q, R, ...; Ist nun φ der von N unter diesen Umständen binnen t beschriebene Bogen, also $d\varphi$ jener, der binnen dt von N beschrieben worden, so ist $d\varphi = Wdt$, oder $dt = \frac{d\varphi}{W}$, also $\frac{dW}{2g.\ dt} = \frac{W\,dW}{2g.\ d\varphi}$, also ist in unserm Falle

$$\frac{W\,dW}{2g.\ d\varphi} = \frac{p.\ P + q.\ Q + r.\ R + s.\ S + \ldots}{a^2A + b^2B + d^2D + \left(\frac{g.\ R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m.\ R}{X}\right)^2 M}$$

und daher (wenn p, P, q, Q, ... a, A, b, B, ... beständig)

$$\frac{W^2}{4g} + C = \frac{pP\varphi + qQ\varphi + rR\varphi + sS\varphi}{a^2A + b^2B + d^2D + \left(\frac{g\ R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m\ R}{X}\right)^2 M}$$

oder wenn für $\varphi = 0$, $W = U$ ist,

$$\frac{W^2 - U^2}{4g} = \frac{pP\varphi + qQ\varphi + rR\varphi + sS\varphi + \ldots}{a^2A + b^2B + d^2D + \left(\frac{g\ R}{X}\right)^2 G + \left(\frac{m\ R}{X}\right)^2 M}.$$

Hier sind natürlich alle jene P, Q, R, ... die nach einer Richtung Rotation bewirken = +, jene die sie nach entgegen gesetzten bewirken = −.

Nennen wir $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ die Endesgeschwindigkeiten der Massen A, B, D, G, M zu Ende der Zeit t, so ist $a = \frac{\mathfrak{A}}{W}$, $b = \frac{\mathfrak{B}}{W}$, $d = \frac{\mathfrak{D}}{W}$, $\frac{R}{X} \cdot g = \frac{\mathfrak{G}}{W}$, $\frac{R}{X} \cdot m = \frac{\mathfrak{M}}{W}$, also ist in unserm Falle

$$\frac{W\,dW}{2g.\,d\varphi} = \frac{pP + qQ + rR + sS + \;.\;.\;.\;.\;.\;.}{\frac{\mathfrak{A}^2}{W^2}A + \frac{\mathfrak{B}^2}{W^2}B + \frac{\mathfrak{D}^2}{W^2}D + \frac{\mathfrak{G}^2}{W^2}G + \frac{\mathfrak{M}^2}{W^2}M}, \text{ oder}$$

$$\frac{dW}{2g.\,W} = \frac{(pP + qQ + rR + sS + \;.\;.\;.\;.)\,d\varphi}{\mathfrak{A}.^2A + \mathfrak{B}.^2B + \mathfrak{D}.^2D + \mathfrak{G}.^2G + \mathfrak{M}.^2M},$$ worin $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}, \ldots$ veränderliche Grössen sind, was beim Integriren wohl zu bemerken ist.

Wir sehen also, dass in diesem Falle $\frac{W\,dW}{2g.\,d\varphi}$ = der Summe der statischen Momente um E getheilt durch die Summe der Momente der Trägheit, wo aber die Momente unmittelbare Rotation um E haben, ein etwas komplizirterer Begriff ist.

§. XIX.

Beispiel. Was für Geschwindigkeiten werden sich die 3 Gewichte A, B, D, (Taf. I. Fig. 14.) nach einer Zeit t geben, die so verbunden sind, wie Figur zeigt, die Masse der Scheiben als Nichts angenommen.

Auflösung. Es sey $A = 20$, $a = 2$, $B = 100$, $b = 4$, und $D = 4$, $d = 5$, so ist $\frac{40 + 2 - 400}{80 + 1600 + 100} = \frac{dW}{2g.\,dt}$. Denn oben erscheinen sie als bewegende Kraft, unten als Last, folglich ihre Summe (und ohnehin Quadrat der Entfernungen positiv), d. i. $\frac{360}{1780} = -\frac{18}{89} = \frac{dW}{2g.\,dt}$, d. i. sie werden sich nach B drehen. $-\frac{36\,gt}{89} = W$; da nun $W = \frac{ds}{dt}$, so ist auch $-\frac{36\,gt\,dt}{89} = ds$ und $-\frac{36\,gt^2}{2.\,89} = -\frac{18\,gt^2}{89} = s$, folglich Geschwindigkeit und Raum gefunden.

§. XX.

Da hier die Axe E immer als unbeweglich genommen wird, so verstehen wir schon allemal unter den Kräften P, Q, R, jene (durch ihre Drucke auf fixe Punkte gemessene) Kräfte, welche in parallelen Ebenen wirken, welche hinter einander alle senkrecht durch die Axe E geschnitten werden; denn gäbe es wirklich in einem Falle Kräfte, die nicht nach solchen parallelen Ebenen wirken möchten, so lässt sich jede solche Kraft in zwei zersetzen, wovon die eine nach der auf der senkrechten Ebene wirkt, und zur Winkelgeschwindigkeit beiträgt, die andere hingegen senkrecht auf diese Ebene wirkt,

und daher zur Winkelgeschwindigkeit nichts beiträgt, da sie durch die Unbeweglichkeit der Axe ganz aufgehoben wird; diese letztere Kraft kann allerdings zu untersuchen auch wichtig seyn, gehört aber zu dem hier abgehandelten Gegenstande nicht, sondern ist ein Object der Statik, und bestimmt den Druck, welchen die Axe in ihren verschiedenen Punkten erleidet, und eben so den Druck den der Hebelarm der Kraft auszustehen hat, kann also die nothwendige Festigkeit bestimmen u. s. w. Da ferner P, Q, R sich immer nur auf die unendlich kleine Zeit dt beziehen, so wirken P, Q, R während dt immer nach Tangenten der auf der Axe E senkrechten Kreise, (welche Kreise alle durch E in ihren Mittelpunkten geschnitten werden) von den Radien p, q, r, ... da p, q, r sich auch nur auf dt beziehen; es ist also allemal während dt der vorliegende Fall mit jenem gleichgeltend (da an der Rotationsbestimmung eines Kreises um seinen Mittelpunkt nichts geändert wird, ob die Kraft nach der Tangente dieses Kreises wirkend, diesen oder jenen Punkt der Peripherie zu ihrem Angriffspunkt wählt), wo alle Kräfte P, Q, R, ... in den senkrechten Entfernungen von E = p, q, r, ... von solchen Punkten dieses Systems von gegen einander unverschiebbaren Punkten angebracht wären, dass alle Kräfte P, Q, R mit einander vollkommen parallel wirken, versteht sich mit Beibehaltung der positiven und negativen Rotationsbestimmung.

Dieses vorausgesetzt, lässt sich in den meisten Fällen der Zähler Pp + Qq + Rr + ... des Ausdrucks $\frac{dW}{2g\,dt}$ weit bequemer ausdrücken. Es ist nemlich Pp + Qq + Rr + ... (Taf. II. Fig. 2.) der während dt besagtermassen wirkenden Kräfte in den Abstand ſ jener 2 parallelen Ebenen, deren eine 𝔈 durch die Axe E, (Taf. II. Fig. 3.) die andere 𝔖 durch den Schwerpunkt der parallelen Kräfte P, Q, R, ... (welche in den Entfernungen p, q, r besagtermassen angebracht sind) so gelegt sind, dass beide mit der Richtung der parallelen Kräfte P, Q, R parallel laufen; daher in folgenden Paragraphen die Lagen des Schwerpunkts der in der Anwendung vorzüglich vorkommenden schweren Körper von gleicher Dichtigkeit gesucht werden. Dass Pp + Qq + Rr + ... besagtem Produkte gleich sey, dürfte ich zwar aus der Elementarmechanik als bewiesen voraussetzten, indessen will ich des Zusammenhangs wegen den Beweis davon hier geben.

Denke man sich die Angriffspunkte ddr Kräfte P, Q — R, T, gegen einander in unverschiebbarem Zusammenhang, z. B. als Punkte eines festen Körpers: sey S der Schwerpunkt aller dieser Kräfte, nemlich jener Punkt, welcher für einen gleichgel-

tenden Fall als Koncentrirungspunkt dieser Kräfte angenommen werden kann; d. h. dass man an dem Falle nichts ändert, ob man annimmt es seyen, wie die Figur zeigt, P, Q — R, T angebracht oder sie seyen nicht so angebracht, sondern deren Summe P + Q — R + T sey im Punkte S angebracht, so ist S jener Punkt, welcher nach negativer Richtung durch eine Kraft P + Q — R — T bestimmt das ganze System von unverschiebbaren Punkten in Ruhestand versetzt, sowohl in Bezug der fortschreitenden als Umdrehungsbewegung um ihren Punkt S; es folgt also aus den ersten Grundsätzen der Elementarstatik, dass wenn S als Ruhepunkt betrachtet wird, folgendes richtig seyn müsse; $P\pi = Q\varkappa - R\varrho + T\tau$. Stellen wir uns nun vor, es sey in irgend einem Punkte der Ebene des Papiers eine darauf senkrechte Linie in E, die wir Axe E nennen wollen, und wir ziehen durch diese Axe E und durch den Schwerpunkt S, die auf der Ebene des Papiers senkrechten Flächen 𝔈 und 𝔖 mit der Richtung der Kräfte P, Q, R, T, parallel, und nennen die senkrechten Abstände der Kräfte P, Q, R, T von der Ebene 𝔈 = p, q, r, t, und den senkrechten Abstand des Schwerpunktes S von Ebene 𝔈 = ſ, so ist $\pi = p - ſ$, $\varkappa = ſ - q$, $\tau = ſ - t$, $\varrho = ſ - r$, also ist $P(p - ſ) = Q(ſ - q) - R(ſ - r) + T(ſ - t)$ oder $Pp - Pſ = Qſ - Qq - Rſ + Rr + Tſ - Tt$ oder $Pſ + Qſ - Rſ + Tſ = P.p + Qq - R.r + T.t$, oder $ſ = \frac{Pp + Qq - Rr + Tt}{P + Q - R + T}$ oder $Pp + Qq + (-R)r + Tt = ſ(P + Q + (-R) + T)$.

Würden also z. B. während der Zeit dt die Kräfte P, Q — R, T, wie die Figur zeigt, wirken, und es wären in diesem System von Punkten auch unverschiebbare träge Massen vorhanden, deren Gewichte = A, B, C, ... und [wenn wir jede als in einem Punkte konzentrirt denken] deren ⊥ Entfernungen von der Axe E [nicht von der Ebene 𝔈] = a, b, c, ..., so wäre:

$$\frac{dW}{2g.\,dt} = \frac{pP + qQ + r(-R) + tT}{a^2 A + b^2 B + c^2 C + \ldots}$$

$$= \frac{ſ.(P + Q + (-R) + T)}{a^2 A + b^2 B + c^2 C + \ldots}.$$

Wäre uns also die Lage des Schwerpunkts S hier bekannt, folglich auch die Entfernung ſ, und nur der Totaldruck P + Q — R + T dieses Systems von Punkten, so wäre der Zähler des obigen Ausdrucks gefunden. Es soll in der Folge gezeigt werden wie man auch den Nenner $a^2A + b^2B + c^2C + \ldots.$ dieses Ausdrucks auf eine für die meisten Fälle bequeme Art ausdrücken könne.

§. XXI.

A B C sey ein schwerer Körper, er besteht nemlich aus gleich schweren Elementen, welche entweder im ganzen Körper in einerlei Entfernung von einander stehen, oder nicht; es ist also der Körper von gleicher Dichtigkeit oder nicht. Wirke die Schwerkraft nach der Richtung $\alpha\ \beta$; (Taf. II. Fig. 4.) werde die Ebene 𝔈 angenommen, und gefragt, in welcher Entfernung ſ von der Ebene 𝔈 jene 𝔖 zu jener 𝔈 parallel gezogen werden müsse, um in der Lage des Körpers A B C durch den Schwerpunkt aller jener Kräfte zu ziehen, welche nach der Richtung der Ebene 𝔖, nemlich a b wirken. Denkt man sich den Körper A B C in unendlich viele unendlich dünne mit 𝔈 parallele Schichten getheilt, und nennt deren Gewichte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$, ... und deren Entfernungen von der Ebene 𝔈 = $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$, ... so sind die Gewichte dieser Schichten, welche sie nach der Richtung a b äussern = $\mathfrak{P}' \text{ Sin } \alpha$, $\mathfrak{P}'' \text{ Sin } \alpha$, $\mathfrak{P}''' \text{ Sin } \alpha$; also diess die Kräfte in den Entfernungen $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$; von der Ebene E angebracht, durch deren Entfernung ſ zu legen; (was den Schwerpunkt der Kräfte $\mathfrak{P}' \text{ Cos } \alpha$, $\mathfrak{P}'' \text{ Cos } \alpha$, $\mathfrak{P}''' \text{ Cos } \alpha$ welche hier nach einer auf 𝔖 senkrechten Richtung wirken, anbelangt, so ist hier um deren Schwerpunkt keine Frage) es ist demnach:

$$ſ = \frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{P}' \text{ Sin } \alpha + \mathfrak{p}''\mathfrak{P}'' \text{ Sin } \alpha + \mathfrak{p}'''\mathfrak{P}''' \text{ Sin } \alpha + \ldots\ldots}{\mathfrak{P}' \text{ Sin } \alpha + \mathfrak{P}'' \text{ Sin } \alpha + \mathfrak{P}''' \text{ Sin } \alpha + \ldots\ldots\ldots} =$$

$$\frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{p}''\mathfrak{P}'' + \mathfrak{p}'''\mathfrak{P}''' + \ldots\ldots}{\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \ldots\ldots},$$ also ſ dasselbe als ob wir es aus 𝔈 und A B C so gedreht dächten, dass 𝔈 und P auf den Horizont ⊥ ständen, und von den ⊥ herab wirkenden Kräften die Rede wäre (so gedreht heisst nemlich in der Lage, dass die Werthe $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$, ... unverändert bleiben). Um nun dieses ſ allgemein auszudrücken, dürfen wir nur den Zähler sowohl als den Nenner durch allgemeine Integralausdrücke anzeigen. Setzen wir die parallelen Schichten $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$, ... von N an bis auf eine von 𝔈 beliebige Entfernung $\mathfrak{p}$ fort, und wir nehmen an, dass Volumen und Dichtigkeit des Körpers dem Gesetze der Stetigkeit dergestalt unterliegen, dass wenn $\mathfrak{p}$ um $d\mathfrak{p}$ wächst, $\mathfrak{P}$, worunter wir das ganze Gewicht aller bis auf die Entfernung $\mathfrak{p}$ fortgesetzten Schichten verstehen, als diesem entsprechende Nullinkrementum $d\mathfrak{P}$ ein allgemeiner algebraischer Ausdruck von $\mathfrak{p}$ um $d\mathfrak{p}$ ist, so ist ganz sicherlich $\mathfrak{P}'\mathfrak{p}' + \mathfrak{P}''\mathfrak{p}'' + \ldots.$ nichts anders als $\int (\mathfrak{p} + d\mathfrak{p})\, d\mathfrak{P} = \int \mathfrak{p} . d\mathfrak{P}$, und der

Ausdruck $\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \ldots$ nichts anders als $\int d\mathfrak{P}$; wenn wir daher $\mathfrak{P}$ als eine Funktion von p durch F (p) ausdrücken, so ist:

$$f = \frac{\int p\, d\,\mathfrak{P}}{\int d\,\mathfrak{P}} = \frac{\int p\, d\, F(p)}{\int d\, F(p)}$$ oder nach *La Grange* Bezeichnung $= \frac{\int (p\, F'(p)\, d\, p)}{\int (F'(p) \cdot d\, p)}$.

Man sieht, dass wenn der Körper von durchaus gleicher Dichtigkeit ist, alles nur vom Gesetze der Figur abhänge, dabei also blos nur geometrische Beobachtungen vorkommen können. Hier wird blos von gleich dichten schweren Körpern gehandelt.

§. XXII.

Es ist seit (§. XX.) gezeigt worden, in wie vielen Fällen der Zähler des Ausdrucks

$$\frac{dW}{2\,g\,d\,t} = \frac{Pp + Qq + Rr + \ldots\ldots}{a^2A + b^2B + c^2C + \ldots}$$ (wo sich alles nur auf dt bezieht) sich bequem ausdrücken lasse. Nun soll gezeigt werden, welcher Methode man sich bediene, um auch dessen Nenner $a^2A + b^2B + c^2C \ldots\ldots\ldots$ bequemer auszudrücken, als unmittelbar der Ausdruck $a^2A + b^2B + c^2C + \ldots\ldots$ ist; hiezu frägt es sich nemlich, wie man die Summe der Trägheitsmomente $a^2A + b^2B + \ldots$ auf einen einfachern Ausdruck bringen könne, wenn selbiger einem steten Gesetze unterliegt?

Es seyen zu dem Ende der Körper Gewichte M, M', M'' (Taf. II. Fig. 5.) etc., die um den Punkt C bewegt werden. Die Summe ihrer Trägheitsmomente um C ist:

$$M.\, MC^2 + M'.\, CM'^2 + M''.\, CM''^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Um diese Summe einfacher auszudrücken, so sey G der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser Gewichte. *) Ziehe durch G und C eine gerade Linie, und aus M, M',

*) Der hier erwähnte Schwerpunkt ist der Schwerpunkt der Gewichte der Masse, nemlich jener Punkt, wo die Summe aller dieser Gewichte als *Konzentrirt* angenommen werden kann, wenn jedoch die trägen Massen M', M'', M''' in ihren Standpunkten bleiben. Sind also in irgend einem Falle nicht diese Gewichte die Kräfte (§. XIX.) P, Q, R. wodurch während dt die Winkelgeschwindigkeit um dW wächst, so ist dieser Schwerpunkt mit jenem der Kräfte P, Q, R, ... nicht zu verwechseln.

M″, ... Perpendikeln darauf; ferner verbinde durch gerade Linien die Punkte M, C, dann M′, C, dann M″, C, ... und eben so die Punkte M, G, dann M′ G, dann M″, G, so ist:

$M . MC^2 = M (MO^2 + OC^2) = M (MG^2 + OG^2 + OC^2)$ d. i. $M . MC^2 = (M . MG^2 - M (OG^2 - OC^2) = M . GM^2 - M (OG + OC) (OG - OC)$ folglich da $OG - OC = CG$ ist, $M . MC^2 = M . GM^2 - M . OG . CG - M . OC . CG$.

Auf gleiche Art:

$M'. M' C^2 = M'. M' G^2 + M'. O'G . CG + M'. O'C'. CG$

und eben so:

$M''. M''C = M''. M''G^2 + M''. O''G . CG + M''. O''C . CG$; u. s. w. Addire nun diese Glieder zusammen, nemlich:

$M . MC^2 + M'. M'C^2 + M'' M'' C^2 = \ldots\ldots$

hiedurch entsteht folgendes:

I. Die ersten Glieder nemlich:

$M . MG^2 + M' M' G^2 + M'. M' G^2$

geben die Summe der Trägheitsmomente dieser Massen um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt G.

II. Die zweiten Glieder geben:

$CG (- M . GO + M'. GO' + M''. GO'')$,

welcher Ausdruck = o ist, weil ein Faktor, nemlich die Summe des statischen Moments um ihren Schwerpunkt G = o ist; Ist nemlich G der Schwerpunkt der Gewichte M, M′, M″, ... so ist $M'. O' G + M''. O'' G = M . OG$ oder $M'. O' G + M''. O'' G - M . O G = o$.

III. Die dritten Glieder geben:

$GC (- M . OC + M'. O'C + M'' O'' C + \ldots\ldots)$.

Nun ist $- MOC + M'. O' C + M''. OC$ = der Summe der statischen Momente um den Punkt C auch = $(M + M' + M'') GC$. Denn der Druck auf die hierzu bewegenden Massen M, M′, M″, [M, M′ M″ drücken hier träge Massen, nicht deren Gewichte aus, zwei Dinge die man von einander immer trennen, muss] bleibt derselbe, es wird also am vorliegenden Falle nichts geändert, wenn ich mir denke, die Massen M, M′, M″, seyen nicht schwere sondern blos träge Massen, und es sey im Punkte G der senkrechte Herabdruck M + M′ + M″ angebracht [M, M′, M″, drücken hier Drucke aus, nemlich die Summe jener Drucke, welche auf einen fixen Punkt oder auf einer Wagschale die Gewichte M + M′ +

M″ + . . . als Gewicht betrachtet ausüben möchten]; dann ist aber die Summe der statischen Momente um den Punkt C = (M + M′ + M″) × CG, folglich ist die Summe der dritten Glieder = (M + M′ + M″) CG², diess ist aber die Summe der Trägheitsmomente um den Punkt C, wenn man sich die ganze Masse M + M′ + M″ im Schwerpunkte G konzentrirt denkt, es ist also in unserm Falle:

$$M.\,CM^2 + M'.\,CM'^2 + M''.\,CM''^2 = M.\,GM^2 + M'.\,GM'^2 + M''.\,GM''^2 + (M + M' + M'')\,GC^2$$

Diess gibt den richtigen Lehrsatz: Die Summe der Trägheitsmomente mehrerer Körper, die um was immer für einen Punkt c (nicht gerade um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt) bewegt werden, ist gleich der Summe der Trägheitsmomente dieser einzelnen Körper um ihren Schwerpunkt, mehr dem Trägheitsmomente um den Drehungspunkt C, welches dann Statt fände, wenn die Summe besagter Körper oder Massen in besagtem Schwerpunkte konzentrirt wäre, oder die Summe der Trägheitsmomente der sich um C drehenden Gewichte [Gewichte heisst hier nicht blos Drukke, sondern mit Druckfähigkeit begabte Massen, welche Drucke den Massen proportional sind, wie die durch Schwerkraft bestimmten Massen deren Elemente gegen die Erde gleich stark streben] M, M′, M″, ... ist gleich der Summe der Trägheitsmomente dieser in der Lage gegen einander unverrückten Gewichte, welche dann Statt fände, wenn deren Umdrehung um den Schwerpunkt G der Gewichte M, M′, M″, . . . geschehen möchte [hier heissen M, M′ M″, blosse Drucke ohne Rücksicht auf Masse] *plus* der Summe M + M′ + M″ + ... dieser Gewichte multiplizirt mit dem Quadrate des Abstandes der Punkte C und G von einander.

§. XXIII.

Es folgt aus (§. XIX.) $\frac{dW}{2g.\,dt} = \frac{Pp + Qq + Rr + \ldots\ldots}{a^2A + b^2B + c^2C + \ldots\ldots}$ dann folgt aus (§. XX.), dass, wenn wir ſ die senkrechte Entfernung jener 2 unter einander und mit der Richtung der (auf einen beliebigen *radius* der Winkelbewegung reduzirten) auf die Umdrehung ganz wirkenden Kräfte P, Q, R (während dt) parallelen Ebenen nennen, deren eine 𝔈 durch Umdrehungsaxe E, die andere 𝔖 durch den Schwerpunkt S der Kräfte P, Q, R, ... gezogen wird, dass $\frac{dW}{2g\,dt} = \frac{ſ\,(P + Q + R + \ldots\ldots)}{a^2A + b^2B + c^2C + \ldots}$ das ſ in verschiedenen Fällen zu finden ist in den

Paragraphen (XXI.) bis (XXIII.) gezeigt worden; nennen wir ferner s, s′ s″, ... die Entfernungen der Gewichte A, B, C, ... vom Schwerpunkte derselben, dann σ die Entfernung dieses Schwerpunktes vom Umdrehungspunkte, um welchen die Winkelgeschwindigkeit gemessen worden, so ist $a^2 A + b^2 B + c^2 C \ldots\ldots\ldots = s^2 A + s'^2 B + s''^2 C + \ldots\ldots + (A + B + C + \ldots)\sigma^2$, also ist:

$$\frac{dW}{2g \cdot dt} = \frac{\int (P + Q + R + \ldots\ldots)}{s^2 A + s'^2 B + s''^2 C + \ldots\ldots + (A + B + C + \ldots)\sigma^2},$$

was nun in jedesmaligem Falle einer solchen Rotation als veränderlich angenommen werden muss, aber doch einem steten Gesetze unterliegt, muss in dieser Formel, aus den Bedingnissen der Aufgabe mit jenem Werthe angesetzt werden, den es während dt hat. Aus der Elementarstatik ist bekannt, dass wenn in einer Lage G der Schwerpunkt des Systems von Gewichten M, M′, M″, ist, dass er es bleibe, man mag das ganze System wie immer umdrehen, ...

Ad S. 22. Z. 27. Die Menge der Bewegungen für eine gegebene Zeit t theile ich ein in Menge des Raums und Menge der Geschwindigkeit. Menge des Raums ist der durch die Masse 𝔐 in Zeit t durchlaufene Raum multiplizirt mit der Masse 𝔐, und Menge der Geschwindigkeit ist die zu Ende Zeit t bestehende Endesgeschwindigkeit multiplizirt mit der Masse 𝔐; und ich bezeichne es durch 𝔐 . s und 𝔐 . v. Soll nun 𝔐 . s sowohl als 𝔐 . v, so wie der Druck auf einen fixen Punkt der bewegenden Kraft, der Masse proportional seyn, so kann (versteht sich) s und v nur jenen in Zeit t durchlaufenen Raum und jene zu Ende Zeit t bestehende Endesgeschwindigkeit bedeuten, welche die Masse 𝔐 blos allein der Einwirknng dieser bewegenden Kraft binnen Zeit *t* zu danken hat.

Ad S. 23. Z. 24. Da hier die Masse M als Einheit der Masse und zugleich als die ganze bewegte Masse betrachtet wird, so sind P, M, N, sowohl beschleunigende als bewegende Kräfte.

Auch hier findet die Vorstellungsart der Entstehung der krummlinigten Bahn des Punktes M wie §. 13. Statt, wenn gleich in den verschiedenen Punkten dieser Kurven die Stösse, welche der Punkt M kontinuirlich durch die Centralkraft des Punktes C erhält, [wenn die Kurve AMm nicht gerade als ein Kreis angenommen wird] nicht senkrecht auf den Tangenten dieser Kurven oder auf den unendlich kleinen geradlinigten Elementen dieser Kurven, und daher auf jenen Richtungslinien angenommen werden können, nach welchen der Punkt M in jedem Punkte der Kurven eine Endesgeschwindigkeit hat, mit der er, wenn in diesem Punkte alle Einwirkung der Cen-

tralkraft aufhören möchte, in Ewigkeit fort nach der Tangente dieses Punktes fortlaufen müsste; denn man darf sich hier die Sache nur so vorstellen. In dem beliebigem Punkte M hat der Punkt M irgend eine Endesgeschwindigkeit nach der Tangente KT dieses Punktes, er erhält aber in der darauf folgenden unendlich kleinen Zeit durch die Einwirkung der Centralkraft von C einen dieser Centralkraft proportionirten Stoss nach der Richtung MC. Nun ist aber dieser Fall mit jenem gleichgeltend (ML drückt die Grösse der Centralkraft nach MC aus), wo der Punkt M nicht durch die Centralkraft ML, sondern durch die zwei Centralkräfte MH und MI auf einmal bestimmt würde, MH $\perp$ KT und MI in KT liege. Hier ist nun die Centralkraft MH (Taf. III. Fig. 1.) jene die M von seiner Bahn MT in jener MZ zu laufen zwingt, in welcher MZ der Punkt M nur in so ferne eine gerade Linie durchläuft, als Mm unendlich klein ist, und man also annehmen kann, dass während der unendlich kleinen Zeit, als M von M bis m gelaufen, der Punkt M nur einen unendlich kleinen Stoss nach MH erhalten hat.

Setzen wir nun, es höre nach diesem unendlich kleinen Stosse nach MH die Centralkraft MH ganz auf zu wirken, hingegen dauere jene MI irgend eine endliche Zeit fort, oder welches dasselbe ist, es wirken während und nach besagtem kleinen Stosse auf M zu gleicher Zeit die Centralkräfte Mr und MU und nicht mehr MI (woselbst MU senkrecht auf KT, folglich auch senkrecht auf der Tangente MZ des Elements Mn, indem TMZ ein unendlich kleiner Winkel ist, und Mr in der Tangente MZ liegt). Da nun IMr ein unendlich kleiner Winkel ist, und Ir = MI sin. IMr, so ist Ir unendlich klein, daher Mr $= \sqrt{MI^2 - Ir^2} =$ MI, und MU eine unendlich kleine Kraft, daher hier angenommen werden kann, es wirke während und nach besagtem unendlich kleinen Stosse auf M blos allein die Centralkraft Mr; auf ähnliche Art lässt sich auch beweisen, dass wenn die Linie MI die Endesgeschwindigkeit des Punktes M im Punkte M nach MT ausdrückt, angenommen werden könne, es bestehe blos allein nach MZ die Endesgeschwindigkeit Mr = MI, welche wir v nennen wollen, so wie wir die Centralkraft Mr durch p ausdrücken wollen, woselbst p zugleich bewegende und beschleunigende Kraft ist, wenn wir die Masse von M, welches ein Elementartheilchen seyn kann, als Einheit der Masse annehmen; dieses vorausgesetzt, wird also der Punkt M nach MZ in Zeit T einen Raum durchlaufen $Tv + g.pT^2$ und folglich in einer unendlich kleinen Zeit dt den Raum $vdt +$ $g.pdt^2$ nach MZ; ist demnach die Zeit, binnen welcher der Raum s durchlaufen worden [nemlich durch den Punkt M in der Kurven AMm durch Einwirken der Cen-

tralkraft von C und der anfänglichen Tangentialgeschwindigkeit nach diesen Kurven] und es ist Mm der in der Zeit dt durchlaufene Raum unter vorbesagten Umständen nemlich $Mm = vdt + gpdt^2$, so ist $Mm = ds$, denn es ist in diesem Falle Mm jenes Nullinkrementum worum es dadurch wächst, dass t um dt wächst; dass s eine Funktion von t, oder t ein Argument von s, unterliegt wohl keinem Zweifel. Um das hier Gesagte nicht etwa als ein Sophisma zu betrachten, erwäge man, dass das vorhin Angenommene von der Kraft p, welche unveränderlich nach MZ wirken möchte, hier wirklich wahr ist, in so ferne der Punkt M während der Zeit *dt*, oder des unendlich kleinen Raumes *Mm* betrachtet wird.

Ad S. 23. Z. 40. Nennt man den durch M in Zeit t durchlaufenen Raum der Kurven AMm bis zum Punkte M = s, so sind die hier zusammengehörige Funktionen folgende, x, y, φ, r, s, t, und also die zusammengehörigen Nullinkremente folgende: dx, dy, $d\varphi$, ds, dt. Es ist hier noch zu bemerken, dass ds der Raum ist der in Zeit dt durchlaufen wird mittelst der in M bestehenden Endesgeschwindigkeit, also durch die Trägheit der Masse M, und mittelst der Einwirkung der während dt unveränderlichen beschleunigenden Kraft P nach MC.

Ad S. 24. Z. 2. Das ist so zu verstehen: Hat die Masse M (hier ein Element) im Punkt M der Kurven AMm die Endesgeschwindigkeit MI = r nach der Tangente von M, (Taf. II. Fig. 6.) so kann eben so behauptet werden, sie habe nicht nach MT sondern nach MZ oder dem folgenden Elemente Mm der Kurven AMm die Endesgeschwindigkeit Mr = MI = r, oder sie habe nach MS und MS' die Endesgeschwindigkeiten MX und MY zu gleicher Zeit und nicht jene v nach MZ; durchläuft nun die Masse M in Zeit dt den Raum Mm = ds, so ist dieser Fall mit jenem gleichgeltend, wo sie in dt durchliefe zu gleicher Zeit die Räume dx und dy. Nun durchläuft sie den Raum dx nach MS vermöge ihrer Trägheit und der Geschwindigkeit MX und vermöge der beschleunigenden Kraft N, also ist der nach MS in Zeit dt durchlaufene Raum blos durch Einwirken der Kraft $N = g.\,N.\,dt^2 = \frac{d^2x}{2}$ (Astr. §. 16,) daher $dx^2 = 2.\,g.\,N.\,dt^2$, da aber dx eine negative Grösse ist, so ist auch dx^2 eine negative Grösse, demnach ist $dx^2 = -$ und zwar (seinem Grössenwerthe zugleich nach) $= -2g.\,N.\,dt^2$. Eben so ist dy der in der Zeit dt von Masse M durchlaufene Raum nach MS' vermöge der Trägheit und Geschwindigkeit MY und vermöge Einwirkung der beschleunigenden Kraft M; es ist also wieder der

blos vermöge der Kraft M in dt durchlaufene Raum $= g.M.dt^2 = \frac{dy^2}{2}$, also $dy^2 = 2gMdt^2$. Wenn nun gleich dy eine positive Grösse ist, so ist hier doch dy^2 eine negative Grösse, woraus folgt $dy^2 = -2g.M.dt^2$; dass aber $dy^2 = -$ folgt hieraus: $dy^2 = -$ wenn $\frac{dy^2}{2} = -$; dass aber $\frac{dy^2}{2} = -$, folgt daraus, dass $\frac{dy^2}{2}$ der in der Zeit dt durchlaufene Raum durch Kraft M ist, welche dem y entgegen wirkt, nemlich nach MN, da doch y von N nach M positiv gezählt wird; auch daraus folgt, dass $dy^2 = -$: es ist

$$dy^2 = 2g.M\,dt^2 = 2g.M.dt.dt = dV.dt;$$

nun aber ist $dV = -$, also dy^2 auch $= -$; dass Endesgeschwindigkeit, welche zu Ende der Zeit t der Punkt M nach Mo hat, welches V nothwendig eine Funktion von t ist; es ist daher dV jenes Nullinkrementum, worum V dadurch wächst, dass t um dt, folglich die in der Zeit dt erlangte Endesgeschwindigkeit nach Mo durch die beschleunigende Kraft M, welcher Zuwachs von Geschwindigkeit aber nach MN erfolgt, also negativ ist.

Ad S. 24. Z. 22. Es ist $\int 2ydy = y^2$ also $\int 2dr.ddr = (dr)^2$, ferner da dt eine beständige Grösse so

$$d\left(\frac{A^2dt^2}{r^2}\right) = -\frac{A^2dt^2.d(r^2)}{r^4} = -\frac{A^2dt^2.2rdr}{r^4} =$$

$$= -\frac{A^2dt^2.2dr}{r^3} \text{ also } \int -\frac{2A^2drdt^2}{r^3} = \frac{A^2.dt^2}{r^2}.$$

Ad S. 25. Z. 8. Man bedenke, dass φ den rektifizirten Bogen *pro radio* $= 1$ ausdrücke, der dem Winkel MCA entspricht, also ist $d\varphi$ der rektifizirte Bogen *pro radio* $= 1$, der dem Winkel φ entspricht; denn $d\varphi$ ist jenes Nullinkrementum, worum φ wächst, wenn s um $ds = Mm$ wächst. Es ist demnach $r.d\varphi$ der rektifizirte Bogen *pro radio* $= r$ der entspricht dem Winkel MCm, nemlich in der Figur das Bogenstück $m\mu$ in rektifizirtem Maasse. Wenn der Körper M von A ausgelaufen, und in der Zeit t das Kurvenstück AM durchlaufen hat, so hat in dieser Zeit t die veränderliche r den Flächeninhalt $ACM = S$ durchlaufen; hier ist S eine Funktion von t, oder von s, oder von x, oder von y, oder von φ, oder von r. Wachsen also t, s, x, y, φ, r, um dt, ds, dx, dy, $d\varphi$, dr, so wächst S um dS; nun wächst aber S

oder der Flächeninhalt ACM um den Flächeninhalt MCm, wenn t, s, ... um dt, ds, ... wachsen, also ist der Flächeninhalt MCm $=$ dS, daher:

$$2\,MCm = 2\,dS = d\,2\,S, \text{ also } 2\,S = \int 2\,MCm \text{ oder } 2\,S = \int r \cdot r\,d\varphi;$$

folgt also aus $r.r.d\varphi = A.dt$ folgendes:

$\int rrd\varphi = A\int dt$ oder $2S = At + C$, welche Gleichung wahr ist für jede zusammengehörigen Werthe von S und t, also auch für die Werthe $S = o$, $t = o$, also ist $2.o = A.o + C$, daher $C = o$, also ist allgemein $2S = A.t$ oder $S = \frac{A.\,r}{2}$;

Nennen wir in derselben Aufgabe den durch r in der Zeit t′ durchlaufenen Flächeninhalt $= S'$, so ist $S' = \frac{A.t'}{2}$ also $S:S' = \frac{A.\,t}{2} : \frac{A.\,t'}{2}$ oder $S: S' = t: t'$. Es folgt aus $2S = \int rrd\varphi$, dass $2dS = rrd\varphi$ und $2ddS = d(rrd\varphi)$; es ist also $2rdr.d\varphi + r^2 dd\varphi$ oder $d(r^2 d\varphi) = 2ddS$; daher folgt aus der Gleichung III. $2rdrd\varphi + r^2.dd\varphi = o$ oder $d(r^2 d\varphi) = o$, dass $2ddS = o$ oder $ddS = o$, also $\int ddS = Cdt$ oder $dS = C$, welches C ein Unendlichkleines der ersten Ordnung seyn muss $= A.dt$. Alles hier Gesagte ist unter der Voraussetzung wahr, dass dt als beständiges Nullinkrementum angenommen, denn diess ward vorausgesetzt, als die Gleichung III. aus jener I. und II. gesucht wurde, nur für den Fall also, wo dt beständig, ist auch dS eine beständige Grösse; lässt man also die Zeit t von o an, um die Stücke dt, dt, dt, dt, ... die alle einander gleich sind, wachsen, so wächst auch S, das, wenn $t = o$, auch $= o$ ist, nach der Annahme hier, um gleiche Stücke Adt, Adt, Adt, ... also entspricht

dem $t = dt$ das $S = Adt$
$= 2dt$ – $= 2Adt$
$= 3dt$ – $= 3Adt$
$= 4dt$ – $= 4Adt$
.

Nun aber ist z. B. $4dt : 2dt = 4Adt : 2Adt$, daher wenn wir die Räume die 4dt und 2dt entsprechen $= S$ und S' und die Zeiten, 4dt und 2dt $= t$ und t' nennen, so folgt $t : t' = S : S'$, wobei aber die Bedingniss ja nicht zu vergessen, dass t und S so gemessen werden, dass beide zugleich verschwinden, d. h. dass wenn $t = o$, entspreche $S = o$. Der hier angeführte Lehrsatz heisst also so: Der um den Centralkörper C beschriebene Sektor der Kurven, welche M durchläuft, oder der von r durchkehrte Flächeninhalt $ACM = S$ ist der Zeit t proportional, binnen welcher S durchkehrt worden, wohl verstanden, w e n n t u n d S s o g e m e s s e n w o r d e n, d a s s d i e s e b e i d e n F u n k t i o n e n z u g l e i c h v e r s c h w i n d e n. Man bemerke noch, dass die in den Zeiten (von $t = o$ an gezählt) $= 1, 2, 3, 4,$ sich zu einander ver-

halten, wie 1 : 2 : 3 : 4 :, ist also S die angenommene Einheit der Fläche zur Messung des durchkehrten Raums, so ist $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$, ..., also der durchkehrte Raum

$$\left.\begin{array}{l} \text{in Zeit } 1 = 1 \\ \;.\;.\;.\; 2 = 2 \\ \;.\;.\;.\; 3 = 3 \\ \;.\;.\;.\; 4 = 4 \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}\right\}$$

also die durchkehrten Räume in Zeit 2 — 1, 3 — 2, 4 — 3, ... oder in der 2ten, 3ten, 4ten, ... Zeiteinheit = 2 — 1 = 1, 3 — 2 = 1, 4 — 3 = 1, ... Es werden also während der Zeit des Laufens in den Kurven AMm, um die Centralkraft in C, von M in jeglichen gleichen Zeitabschnitten (es mögen diese auf einander folgen oder durch andere Zwischenzeiten getrennt seyn) gleichgrosse Flächen von r durchkehrt.

Ad S. 25. Z. 31. Hier ist ds der in Zeit dt durchlaufene Raum nach der Richtung des Kurvenelements Mm, welcher Raum durchlaufen wird mittelst der in M bestehenden Endesgeschwindigkeit v nach MT oder r. Cos TMm = r. Cos o = v nach Mm, (Taf. III. Fig. 2.) und mittelst der binnen dt nach der Richtung ds bestehenden Einwirkung der während dt beständigen Centralkraft.

Ad S. 25. Z. 35. Ist z. B. AMM'ℓ die Kurve, die durch die Masse M mittelst einer anfänglichen Tangentialgeschwindigkeit und der Centralkraft in C durchlaufen wird, und es heissen in M und M' die Endesgeschwindigkeiten nach den Tangenten von M und M' = v und v', so ist $v = \frac{A}{CT}$ und $v' = \frac{A}{CT'}$ (wenn CT und CT' ⊥ (Taf. III. Fig. 3.) auf besagten Tangenten) oder v : v' = CT' : CT.

Ad S. 26. Z. 3. Um diess recht zu verstehen merke ich folgendes an; r ist jene veränderliche Zahl, wodurch [indem sie sich auf eine angenommene Längeneinheit bezieht] die veränderliche Länge von r ausgedrückt wird, und indem vom Punkte M der Kurven AN die Rede ist, ist r jene Zahl, welche ausdrückt, wie oft die angenommene Einheit der Länge in der Linie MC enthalten sey; messe ich nun MC von C an und schneide davon aus C die Länge 1 ab, so drückt 1 die angenommene Einheit der Länge aus. In unserm Falle hat der Endpunkt R des Kreises 1 von der ganzen Länge r in der Zeit t den Bogen φ beschrieben. Es drückt hier φ wie im gan-

zen Verlaufe der Auflösung unserer Aufgabe die Länge jenes rektifizirten Bogens aus, welchen der Punkt R in der Zeit t durchlaufen hat, wobei zu merken, dass φ auf den Radius 1 sich bezieht. Da nun φ eine Funktion von t ist, so wächst φ um $d\varphi$, wenn t um dt wächst, es ist demnach $d\varphi$ der in der Zeit dt vom Punkte R durchlaufene Raum, nemlich der in dt durchlaufene unendlich kleine Bogen von Radius 1 im rektifizirtem Maasse ausgedrückt. Die Endesgeschwindigkeit nach der Tangente des Endpunktes von φ, welche dem Punkte R im letzten Augenblicke der Zeit t zukömmt, und während der Zeit dt unverändert bleibt, heisse w, so ist auch w jene Endesgeschwindigkeit, womit R nach der Richtung des Elements $d\varphi$ beständig fortlaufen möchte, wenn vom Endpunkte der Zeit t an auf R gar keine Kraft mehr wirken möchte, dieser Punkt also blos nach dem Gesetze der Trägheit fortlaufen müsste, denn die Tangente des letzten Elements von φ und jene des Elements $d\varphi$ weichen von einander nur um einen unendlich kleinen Winkel ab. Es ist demnach [§. 16. Astr.] $d\varphi = w\,dt$ oder $w = \frac{d\varphi}{dt}$, wo dann die übrigen analytischen Folgerungen aus dem Vorhergehenden sehr deutlich sind. Was wir hier durch w ausgedrückt haben, nennt man die dem Punkt M entsprechende Winkelgeschwindigkeit; es ist nemlich diese Winkelgeschwindigkeit die Endesgeschwindigkeit des Punktes R, wenn die Masse M in M ist, oder jener Raum der in jeder folgenden Zeiteinheit [vom letzten Zeitpunkte der Zeit t an] vom Punkte R nach der Tangente des Endpunktes von φ oder des Elements $d\varphi$ gleichförmig durchlaufen würde, wenn im letzten Punkte der Zeit t oder des Bogens φ keine Kraft mehr auf die Masse M wirken möchte, folglich der Punkt R seiner Trägheit ganz überlassen bliebe; man bemerke aber, dass in diesem Falle w zu gleicher Zeit auch jener Raum ist [im rektifizirtem Maasse], welchen in jeder kommenden Zeiteinheit der Punkt R in der Peripherie des Kreises vom Radius 1 durchlaufen würde [vom letzten Punkte des Bogens φ an], wenn der Punkt R nicht anders als in diesem Kreise laufen könnte, daher w mit allem Recht die dem Punkte M entsprechende Winkelgeschwindigkeit (die man auch Bogengeschwindigkeit *pro radio* 1 nennen könnte] genannt wird.

Hier ist die beste Gelegenheit folgendes darzuthun: wenn ein Körper eine Endesgeschwindigkeit w nach irgend einer geraden Richtung hat, und es wird dieser Körper gehindert sich nach dieser geraden Richtung fortzubewegen, ja vielmehr gezwungen, sich nach irgend einer Kurven zu bewegen, wovon aber vorbesagte Richtung eine Tangente ist, so wird dieser Körper in dieser Kurven mit derselben

Geschwindigkeit w gleichförmig laufen, womit er im ungehinderten Zustande nach besagter geraden Richtung gelaufen wäre, d. h. er wird in jeder Zeiteinheit ein Stück dieser Kurven durchlaufen, das in rektifizirtem Maasse = w.

A______________G

Wenn man sich eine Gerade AG in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt vorstellt, und denkt sich einen Punkt, welcher von A mit irgend einer anfänglichen Geschwindigkeit c nach G zu laufen bestimmt ist, und es wirkt auf diesen Punkt überdiess noch während seines ganzes Laufes von A nach G eine Kraft, welche beständig fort den Punkt nach der Richtung AG treibt [diess mag nun positiv oder negativ seyn], und welche Kraft so beschaffen ist, dass sie, ihrer Druckgrösse nach auf einen fixen Punkt ausgedrückt, einer einem steten Gesetze folgenden Veränderlichkeit unterliegt, wobei aber die Richtung der veränderlichen Druckgrösse unverändert bleibt, so wird der bewegte Punkt von A nach G mit irgend einer einem steten Gesetze unterliegenden ungleichförmigen Bewegung laufen: Wird nun diese Linie AG in eine krumme Linie gebogen, welche einer beliebigen Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate unterliege; werden nemlich die unendlich kleinen Theile dieser Geraden AG gegen einander in eine solche Lage gebracht, dass jegliche zwei an einander stossenden unendlich kleinen Geraden mit einander nur einen unendlich kleinen Abweichungswinkel bilden (Taf. I. Fig. 15.) [wodurch aber endlich die Kurve doch eine endliche Abweichung von der Richtung des ersten Kurvenelements erhält, indem diese unendlich kleine Abweichung unendlich oft wiederholt wird, indem jedes endliche Kurvenstück aus unendlich vielen solchen unendlich wenig von einander abweichenden unendlich kleinen Geraden besteht] und es hat dieser Punkt die Bestimmung von A aus nach der Tangente dieses Punktes mit gleichförmiger Geschwindigkeit c zu laufen, und es wird ferner dieser Punkt, welcher nur nach der Kurve AG laufen kann [weil er wirklich durch die Kurve gehindert wird nach besagter Tangente zu laufen] während seines ganzen Laufes durch AG in jedem Punkte dieser Kurven nach der Tangente des jedesmaligen Standpunktes durch eine Kraft bestimmt, welche so beschaffen ist, dass sie nebst der gesetzmässigen Veränderlichkeit ihrer Richtung noch auch einer gesetzmässigen Veränderlichkeit ihrer Druckgrösse auf einen fixen Punkt dergestalt unterliegt, dass in dem jedesmaligen Kurvenelemente diese sich auf besagten Punkt äussernde Druckgrösse dieselbe ist, als sie in demselben Elemente war, als AG nach als gerade Linie betrachtet wurde, so ist, wenn alle diese Um-

stände wirklich vorhanden sind, die Bewegung des Punktes [versteht sich, dass hier nur von einem physischen und materiellen Punkte die Rede seyn kann] eine und dieselbe im 1ten und 2ten Falle mit dem einzigen Unterschiede, dass im 1ten Falle diese Bewegung nach der geraden Linie A G, im 2ten Falle hingegen nach der Kurven A G läuft. Eine und dieselbe Bewegung heisst hier einerlei Endesgeschwindigkeit in einerlei Elemente der Geraden und Kurven, oder einerlei durchlaufener Raum oder durchlaufene rektifizirte Länge der Geraden und Kurven A G in einerlei Zeit

Aus der Richtigkeit dieses Lehrsatzes folgt dann das *Corollarium*, dass ein physischer Punkt der eine Endesgeschwindigkeit c nach einer Geraden A G oder nach der Tangente einer Kurven A G hat, und übrigens durch gar keine Kraft bestimmt wird, die Gerade und Kurve mit einerlei Geschwindigkeit c durchläuft; es ist nemlich in diesem Falle die Druckgrösse der Kraft in jeden Elemente der Geraden und entsprechenden Elemente der Kurven gleich Null. Diesen Lehrsatz beweise ich auf einem, wie mich deucht, genugsam analytischen Wege, auf folgende Art: [dass hier nur von einer kontinuirlichen Kurven und nicht etwa von solchen Punkten einer Kurven die Rede seyn könne, welche Spitzen bilden, wo nemlich zwei Kurvenelemente mit einander einen endlichen Abweichungswinkel bilden, versteht sich wohl von selbst.]

Hier sowohl in N° I. als II. (Taf. III. Fig. 4. Taf. III. Fig. 5.) ist $a.o + b.o + g.o + d.o + \ldots$ bis $n = s$, welches den Raum ausdrückt der unter vorbesagten Umständen in N° 1. in der Zeit t, in N° 2 in der Zeit T durchlaufen wird; ferner ist (in N° 1.) v die Endesgeschwindigkeit, welche zu Ende des Raumes s nach A G Statt findet; hingegen (in N° 2.) V die Endesgeschwindigkeit, welche zu Ende des Raumes s nach der Tangente n i dieses Endpunktes Statt findet, nach welcher aber der bewegte Punkt nicht laufen kann, sondern aber das unendlich kleine Kurvenelement ds, welches mit besagter Tangente den Winkel $\sigma.o$ macht, in folgenden unendlich kleinen Zeittheilchen dT durchlaufen muss; ferner sind in (N° 1.) p, p' p'', ... die nach A P wirkenden Kräfte ihrer Druckgrösse nach auf einen fixen Punkt ausgedrückt, während dem der bewegte physische Punkt den Raum $a.o$, jenen $b.o$, jenen $g.o \ldots$ durchläuft, so wie überhaupt P die Kraft ihrer Druckgrösse nach auf einen fixen Punkt ausdrückt, welche in dem letzten Punkte des Raums s auf besagten physischen Punkt nach A G wirkt. Eben so sind in (N° 2.) p, p', p'', ... jene Druckgrössen, welche auf besagten physischen Punkt wirken, während dem er die Räume $a.o$, $b.o$, $g.o$, ... durchläuft, so wie auch hier P

jene Druckgrösse ausdrückt, welche im letzten Punkte des Raumes s auf besagten physischen Punkt wirkt, doch ist hier zu merken, dass sich die Druckgrössen p, p′, p″, ... P, nicht wie in N° 1. auf eine beständige Richtung AG beziehen, sondern es beziehen sich p auf die Tangente des Kurvenelements a.o, p′ auf die Tangente des Kurvenelements g.o, und überhaupt P auf die Tangente ni jenes letzten Kurvenelements, womit das rektifizirte Kurvenstück s sich endigt. Da hier sowohl in N° 1. als in N° 2. alles, einem steten Gesetze unterworfen, angenommen wird, so ist p von a.o, p′ von a.o + b.o, p″ von a.o + b.o + g.o und überhaupt p von s einerlei Funktion, d. h. es lässt sich P algebraisch durch s ausdrücken, diess ist wahr von N° 1. und N° 2.; es ist aber überdiess unseren Voraussetzungen zufolge [wenn sich nemlich P sowohl in N° 1. als in N° 2. auf einerlei Elementartheilchen der Geraden und Kurven beziehen] für einerlei s auch einerlei P. Drücken wir daher in (N° 1.) P durch F (s), und in (N° 2.) P durch f(s) aus, so ist für s = s, F (s) = f (s), welches auf keine Art für jeden Werth von s wahr seyn kann, als wenn letztere Gleichung eine identische Gleichung ist; es ist also auch in (N° 2.) P = F(s), wenn in (N° 1.) P = F (s) ist. In N° 1 sind hier die zusammengehörigen veränderlichen Grössen v, t, s, P, und daher die zusammengehörigen Nullinkremente oder Differenzialen dv, dt, ds, dP. Auf ähnliche Art sind in N° 2. die zusammengehörigen veränderlichen Grössen V, T, s, P, und daher hier die zusammengehörigen Differenzialen dV, dT, ds, dP. In N° 2 bezeichne v jene zu V, T, s, P gehörige veränderliche Grösse, wodurch jene Endesgeschwindigkeit ausgedrückt wird, welche zu Ende des Raums s und der Zeit T in dem Augenblicke, da P nach ni Statt findet, und da die Endesgeschwindigkeit V nach ni besteht, welche Endesgeschwindigkeit v nicht nach ni sondern nach der Tangente jenes Kurvenelements ds besteht, welches unmittelbar nach dem letzten Kurvenelement des Raums s folgt; da lässt sich denn leicht beweisen, dass $v = V - \frac{V.\sigma^2.oo}{2}$ *), also dv =

*) Hat ein Körper nach ni die Geschwindigkeit nl = V, (Taf. II. Fig. 7.) so ist seine Geschwindigkeit nach np nemlich v = nr = np — pr = (plk Kreisbogen dessen Centrum in n) = V — pr, aber pr : rl = rl : 2.n.p — pr, also $rl^2 = 2.np.pr - pr^2$ oder $pr^2 - 2.np.pr = -rl^2$ oder $pr^2 - 2\,V.pr = -V^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha$, also $pr = \frac{2\,V}{2} \pm$ $\pm \sqrt{V^2 - V^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha} = V \pm V \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 \alpha} = V \pm V \sqrt{\operatorname{Cos}^2 \alpha} = V \pm V.\operatorname{Cos} \alpha$.

$d\left(V - \frac{V.\sigma^2.\,o.o}{2}\right) = dV - \frac{o.o}{2}\,d\,(V\sigma^2)$, woselbst dV und eben so $d\,(V\sigma^2)$ ein Produkt aus einem endlichen Koeffizienten in eine Nulle ist, daher $dv = dV$, so wie aus $v = V - \frac{V\,\sigma^2.\,o\,o}{2}$ folgt $v = V$. Nun ist in der Aufgabe (N° 2.) $dV = \frac{2g.\,P}{M}.\,dT$, und da in derselben Aufgabe $V\,dT = ds$ oder $dT = \frac{ds}{V}$, so $dV = \frac{2g\,P}{M}.\,\frac{ds}{V}$ oder $V\,dV = \frac{2g\,P}{M}.\,ds$ oder $V\,dV = \frac{2g}{M}\,F\,(s)\,ds$, also auch $v\,dv = \frac{2g}{M}\,F\,(s)\,ds$, woraus durch Integration folge $f\,(v) = f^+\,(s) + C$, welches auch wahr ist für folgende zusammengehörige Werthe von v und s, $v = c$, $s = o$, also $f\,(c) = f^+\,(o) + C$, woraus $C = f\,(c)\,f^+\,(o)$, also ist hier $f(v) = f^+\,(s) + f\,(c) - f^+\,(o)$. Ganz dieselbe Gleichung findet aber auch zwischen v und s in N° 1 Statt [denn dort ist $dv = \frac{2g\,P}{M}.\,dt = \frac{2g\,F\,(s)}{M}.\,\frac{ds}{v}$, also $v\,dv = \frac{2g}{M}.\,F\,(s)\,ds$, oder $f\,(v) = f^+\,(s) + A$, wo wieder $v = c$, $s = o$, also $f\,(c) = f^+\,(o) + A$ oder $A = f\,(c) - f^+\,(o)$, also $f\,(v) = f^+\,(s) + f\,(c) - f^+\,(o)$] für N° 2. folge aus den zwischen v und s Statt findenden Gleichungen z. B. $v = F^+\,(s)$, so zeigt sich hieraus, dass sowohl in N° 2. als in N° 1. zu Ende einerlei Raums s [in N° 2. als rektifizirte Länge gemessen] folglich in den Endpunkten derselben Elementartheilchen der krummen und geraden Linien z. B. in g. o. und g. o dieselbe Endesgeschwindigkeit nach der Richtung d.o des kommenden Elements der Kurven oder Geraden Statt findet, wodurch denn nothwendig in Bezug auf das Verhältniss von Zeit, Raum und Geschwindigkeit ganz dieselbe Bewegung bestehen muss; in N° 2. nach der Kurven AG als in N° 1. nach der Geraden A G.

Das ist auch wahr für $\alpha = o$, wo $pr = o$, also $o = V \pm V.\,1$, oder $o = V \pm V$, da aber $o = V - V$, so kann nicht $p = V + V.\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ seyn, da diese Formel nicht allgemein wahr wäre; also $pr = V - V\,\mathrm{Cos}\,\alpha = V\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha) = V\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} + \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\right)\right) = v\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} + \frac{\alpha^6}{2\ldots6} - \ldots\right)$

Ad S. 26. Z. 10. Da dt eine beständige Grösse, so A dt eine beständige Grösse; es ist also r. $rd\varphi$ eine beständige Grösse; nun ist aber r. $rd\varphi$ das doppelte Inkrementum $\left[r.\, rd\varphi = \frac{2\, r.\, rd\varphi}{2} \right]$ worum der von r in der Zeit t durchkehrte Raum S binnen der Zeit dt zunimmt; da auch $\frac{r.\, rd\varphi}{2}$ eine beständige Grösse, so nimmt also S zu Ende jeder Zeit binnen einer folgenden unendlich kleinen Zeit dt, die eine beständige Grösse, um ein beständiges Stück d S zu.

Ad S. 26. Z. 25. Hier bemerke man folgendes: Der Schluss r. $rd\varphi = xdy - ydx$ ist blos auf geometrischen Gründen gebaut, ist also bei der Kurven A M m wahr, weil sie eine Kurve ist, die einem steten Gesetze unterliegt, der Schluss hingegen $xdy - ydx = Adt$ beruht auf der Voraussetzung r. $rd\varphi = Adt$, welche blos dann Statt findet, wenn die hier aufgestellten dynamischen Voraussetzungen Statt finden; die Gleichung $xdy - ydx = Adt$ begreift also schon die Bedingnisse in sich, dass der in der Kurven A M m laufende physische Punkt M, in dieser Kurven ein solches Geschwindigkeitsverhältniss beobachte, dass die durchkehrten Räume, und die Endesgeschwindigkeiten

Nun folgt aber aus dieser Gleichung eine Formel $y : x = d^2y : d^2x$, worin das zweite Differential sowohl von y als von x in Rechnung kömmt; welches ein Beweis ist, dass hier aus der Natur der Aufgabe d^2y und d^2x nicht verschwinden, d. h. dass die Koeffizienten dieser Differenzialien keine Nullen sind; denn es ist aus den ersten Grundsätzen der Differenzialrechnung bekannt, dass jene Differenzialien, deren Koeffizienten Null sind, ganz aus der Rechnung wegfallen, (wovon der Grund in der endlichen Differenzrechnung liegt,) so folgt z. B. aus $ax + bx^2 + c = hy$, dass $adx + 2bxdx = hdy$, es ist aber $d(c) = d(c.x^0) = cdx^0 = c.\,ox^{0-1}\,dx = \frac{o.\,c}{x}.\,dx$, also der Koeffizient von d(c) eine Nulle $= \frac{o.\,c}{x}$, und es ist dc ganz aus der Rechnung gefallen. Nun aber sind (§. 16. Astr.) $\frac{d^2y}{2}$ und $\frac{d^2x}{2}$ jene Theile der Räume dy und dx die M in Zeit dt durchläuft (denn M durchläuft in Zeit dt den Raum ds oder jene dy und dx) blos durch Einwirken der beschleunigenden Kräfte die während dt auf M unmittelbar und unveränderlich nach den Richtungen von dy und dx wirken. Nennen wir diese während dt nach dy und dx wirkenden Kräfte = M und N (denn in Kräfte nach diesen zwei Rich-

tungen lässt sich die Gesammtkraft von wie viel immer Kräfte die auf M nach den verschiedensten Richtungen wirken, immer auflösen nach der Statik) deren Existenz bewiesen ist, wenn bewiesen ist, dass auf M in jedem dt nach was immer für Richtung eine Gesammtkraft P wirke; dass aber eine solche Kraft P bestehe, beweist sich dadurch, dass die Masse M nicht blos ihrer Trägheit überlassen bleibt; denn in diesem Falle bestünde gleichförmige Bewegung, also würde in jedem dt einerlei ds beschrieben, oder es wäre (da dt beständig) ds eine beständige Grösse, und es liefe M nach gerader Linie, also wären dy und dx beständige Grössen (Taf. 2. Fig. 8.), und also könnten d^2y und d^2x hier gar nicht in Rechnung vorkommen. Es folgt also aus unsern dynamischen Voraussetzungen, dass während dt als M die Räume dy und dx durchläuft, nach den Richtungen von dy und dx oder von y und x beständige beschleunigende Kräfte M und N wirken, es ist also (blos der Grösse nach bestimmt) (Astr. §. 16.) $d^2y = 2g.\ M.\ dt^2$ und $d^2x = 2g.\ N.\ dt^2$. Nun ist aber dx = —, also auch d^2x = —, daher $d^2x = -\ 2g.\ N.\ dt^2$; ebenfalls ist $d^2y = -\ 2g.\ M.\ dt^2$; letzteres folgt hieraus: Es ist hier durch den Ausdruck, das M sich um den Punkt C bewege (Taf. 3. Fig. 6.), stillschweigend vorausgesetzt, dass M um C eine Kurve AMm beschreibe die in jedem Punkte M ihre hohle oder konkave Seite (nie die konvexe) dem Punkte C zuwendet; ist aber diess, so muss, (da M vermöge seiner Trägheit von M nach MT liefe,) wenn M während dt durch ds laufen soll, die während dt auf M wirkende Kraft M nach y so wirken, dass die Masse M durch M nach MN (nicht nach Mo) bestimmt werde. Also wirkt die Kraft M negativ, also ist der durch die Kraft M allein durchlaufene Raum $g.\ M.\ dt^2 \ldots$ dt = —, also auch $2g.\ M.\ dt^2$ = —, also ist $d^2y = -\ 2g.\ M.\ dt^2$. Da $\frac{d^2x}{2}$ = —, nemlich der in Zeit dt durch alleiniges Einwirken von N nach dx durchlaufene Raum = —, nemlich nach MU liegt (nicht nach UM), so ist kein Zweifel, dass während dt auf Masse M eine Einwirkung der zwei Kräfte M und N geschieht, wovon erstere nach MN, letztere nach MU wirkt. Die Wirkung dieser 2 Kräfte ist die Wirkung einer einzigen nach der Diagonale des Parallelogramms (Statik) jener Seiten die M und N der Grösse nach ausdrücken, in den Linien MN und MU liegen, und in M einen Winkel UMN bilden. Ist z. B. MR = M, (Taf. III. Fig. 7.) MH = N, so ist (der Grösse und Richtung nach) ML die auf M während dt wirkende Totalkraft P; nun aber liegt ML in der Geraden MLC, oder es ist MLC eine Gerade; denn $MR : MH = M : N$, aber $M : N = -\frac{d^2y}{2g.\ dt^2} : -\frac{d^2x}{2g.\ dt^2} = d^2y : d^2x$, also

MR : MH, oder MR : RL = $d^2y : d^2x$; aber $d^2y : d^2x = y : x$ = MN : NC, also MR : RL = MN : NC. Es wirkt also auf Masse M während Zeit dt beständig eine einzige Kraft P nach MC, so in jedem andern dt, also besteht in C eine Kraft, die in allen Punkten der Kurven die Masse M anzieht, d. h. es besteht in C eine Centralkraft.

Ad S. 32. Z. 25. P drückt im Allgemeinen hier den veränderlichen Druck der Einheit der Masse von M (auf einem fixen Punkt gemessen) gegen den Centralpunkt C aus, der in jedem Punkte der elliptischen Laufbahn der Masse M gegen C (im Brennpunkte), also nach dem *radius vector* der Ellipse ausgeübt wird; wird aber P in eine Differenzialgleichung mit andern Differenzialien gebracht, so ist P dieser Druck blos während dt, also zu Ende von t, s, S, x, y, φ, r, u, während Statt findet v, w, ...

Ad S. 33. Z. 3. c ist die in der Länge EC enthaltene Anzahl von angenommenen Längeneinheiten, a die in der Länge EB = EA enthaltene Anzahl von derselben angenommenen Längeneinheit, also drückt $\frac{c}{a}$ die Zahl aus, wie oft a in c enthalten, oder $\frac{c}{a}$ ist die Länge von EC, wobei a als Längeneinheit angenommen.

Ad S. 34. Z. 18. P drückt die beschleunigende Kraft der Masse M während dt gegen die Sonne also nach MC aus, und zwar im Gewichtmaasse, nemlich ihrer Druckgrösse nach auf einen fixen Punkt, der der Masse M nach CM entgegen drückte. Also ist P, als Zahl betrachtet, jene Zahl, welche andeutet, wie oft in dieser Druckgrösse die angenommene Einheit des Drucks enthalten sey; als Einheit des Drucks ist aber (§. 15. §. 16. Astr.) das Gewicht jener Masse (auf der Oberfläche unserer Erde gewogen, angenommen), welche Masse als Einheit der Masse angenommen ist; als Einheit der Masse ist hier M angenommen. Es ist also P die Zahl, welche andeutet, wie oft das Gewicht von M (auf der Oberfläche unserer Erde gewogen) in dem Drucke enthalten ist, den während dt die Masse M in der Entfernung r nach MC auf einen fixen Punkt ausüben möchte.

Ad S. 34. Z. 23. Hier heisst p die beschleunigende Kraft der Schwere der Einheit der Masse auf der Oberfläche der Erde; es heisst also hier p das Gewicht (auf der Oberfläche der Erde gewogen) der Masse M. Es ist $P = \frac{f^2}{r^2}$ also auch $\frac{P.\,p}{r^2} = \frac{f^2}{r^2}$. Hier drückt P. p denselben Druck aus als P, aber P. p ist nicht dieselbe Zahl als P; P.p ist eine pmal grössere Zahl als P, bezieht sich aber auf eine pmal kleinere Einheit des

Drucks als P; sage ich $P = \frac{f^2}{r^2}$, so ist als Einheit des Drucks angenommen (auf der Oberfläche unserer Erde gewogen) das Gewicht von M; sage ich $P.\ p = \mathfrak{P}$, so ist als Einheit des Drucks angenommen bey der Zahl $\mathfrak{P}$ jenes Gewicht (auf der Oberfläche der Erde gewogen) wovon p solcher Gewichte = M, also $\frac{1}{p}$ des Gewichts von M (auf der Oberfläche der Erde gewogen). In der Proportion $p : P = rr : ff$ heisst P eigentlich was wir durch $P.\ p = \mathfrak{P}$ ausdrückten, also ist deutlicher ausgedeutet $p.\ \mathfrak{P} = r.r : f.f$, welche Proportion wahr ist, was man bei p und $\mathfrak{P}$ für Gewichtseinheit zur Messung der Drucke p und $\mathfrak{P}$ annehmen mag; p ist dann das Gewicht von M (auf der Oberfläche der Erde gewogen) oder in der Entfernung f von der Sonne gewogen, und $\mathfrak{P}$ ist das Gewicht von M in der Entfernung p von der Sonne gewogen. Hier wird des Planeten M ganze Masse M in einen einzigen Punkt, eben so die ganze Masse der Sonne in dem Punkte C konzentrirt angenommen.

Ad S. 34. Z. 29. Bei $P = \frac{f^2}{\varrho^2}$ oder $P = f^2$ ist $p = 1$ angenommen, also P die Zahl, welche anzeigt, wie oft die beschleunigende Kraft p in P enthalten sey. Sowohl in $P = \frac{f^2}{\varrho^2}$ als in $P = f^2$ drückt P nicht nur einerlei Druckgrösse, sondern auch einerlei Zahl aus; denn in beiden Gleichungen ist einerlei Einheit des Drucks angenommen, und die Zahl $\frac{f^2}{\varrho^2}$ = der Zahl f^2, nur bezieht sich $\frac{f^2}{\varrho^2}$ auf angenommene Längeneinheiten, deren f die Länge f, und deren ϱ die Länge ϱ geben, hingegen bezieht sich f in $P = f^2$ auf jene Längeneinheit, deren 1 die Länge ϱ giebt. Es ist $P = f^2$ keine Absurdität (welches man vielleicht glauben möchte, da ein Gewicht einem Flächeninhalt f^2 nicht gleich seyn kann) denn $P = f^2$ folgt aus $P = f^2.\ p$ wo $p = 1$, also $P = f^2.\ 1$. z. B. in Pfunden P ℔ = f^2. 1 ℔ (wenn das Gewicht von M auf der Oberfläche der Erde gewogen oder in der Entfernung f von der Sonne, ein ℔ wägen möchte). Die Proportion $p.\ P = \varrho\varrho : f.\ f$ heisst in Worten: Es verhält sich der Druck auf einen fixen Punkt, den die Masse M auf der Oberfläche der Erde oder in der Entfernung f von der Sonne äussert, zum Drucke auf einen fixen Punkt, den dieselbe Masse M in der Entfernung ϱ von der Sonne äussert, umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen f und ϱ; oder da sich die Centralkraft der Erde in ihrem Mittelpunkte konzentrirt, also

jeder Punkt der Oberfläche von diesem Konzentrirungspunkte um die Länge ϱ absteht, so kann man auch sagen: Es verhält sich der Druck auf einen fixen Punkt, den die Masse M in der Entfernung ϱ vom Konzentrirungspunkte der Centralkraft der Erde gegen diesen Konzentrirungspunkt äussert, zum Drucke auf einen fixen Punkt, den dieselbe Masse M in der Entfernung ϱ vom Konzentrirungspunkte der Sonne (denn die Sonne ward bisher als ein Punkt betrachtet) gegen diesen Konzentrirungspunkt äussert, wie sich verhält das Quadrat der Entfernung ϱ zum Quadrate jener Entfernung f, in welcher Entfernung f vom Konzentrirungspunkte der Sonnencentralkraft die Masse M gerade so viel gegen die Sonne wiegt, oder auf einen fixen Punkt drückt, als diese Masse in der Entfernung ϱ vom Konzentrirungspunkte der Erdcentralkraft gegen diesen Konzentrirungspunkt wiegen möchte. Es giebt also $\varrho^2. f^2$ das Verhältniss der bewegenden Kräfte von einerlei Masse M in einerlei Entfernung ϱ vom Konzentrirungspunkte der Centralkraft der Erde und von jenem der Sonne, also giebt auch $\varrho^2 : f^2$ das Verhältniss der absoluten Centralkräfte der Erde und Sonne. Nennt man also c, C die absoluten Centralkräfte der Erde und Sonne, so $c : C = \varrho^2 : f^2$, oder wenn $\varrho = 1$ angenommen, also f in Erdhalbmessern in der Entfernung f enthalten sey, so $c : C = 1 : f^2$, wird ferner $c = 1$ angenommen, also C in Centralkräften der Erde ausgedrückt, d. h. es bedeutet C jene Zahl, welche andeutet, wie oft die Centralkraft der Erde in der Centralkraft C enthalten sey, so $1 : C = 1 : f^2$, also $c = f^2$. C bezieht sich auf Gewichte. Ist z. B. die absolute Centralkraft der Erde = a ℔, so ist jene der Sonne = C mal a ℔, oder wenn wir das Gewicht a ℔ durch das Zeichen γ ausdrücken, so heisst die Grösse c eigentlich $= C. \gamma$, aber als Zahl blos C. Sagen wir nun $A^2 = f^2. e. g$ also $A^2 = C. e. g$, so ist C eine Zahl, die sich auf Gewichte bezieht, wobei das Gewicht der Centralkraft der Erde, als Einheit angenommen; hingegen sind e und g Längen, woselbst der Erdhalbmesser als Längeneinheit angenommen werden muss; denn $C = \frac{ff^2}{\varrho\varrho}$, also $ff = C. \varrho\varrho$, also allgemein $A^2 = C. \varrho. \varrho. e. g$, und nur für $\varrho = 1$ ist $A^2 = C. e. g$, es kann sich g auf eine beliebige erste Zeiteinheit beziehen, nur muss ich dann nach dieser Längeneinheit, worauf ich e und g beziehe, und nach dieser Zeiteinheit, worauf ich g beziehe in den Gleichungen, alle Längen und Zeiten messen.

Ad S. 55. Z. 4. Sonnen-Parallaxe heisst hier tägliche Parallaxe und Horizontal-Parallaxe und zwar im Apogäum, es ist also im Dreyeck acb (Taf. III. Fig. 8.) der Winkel acb = 90°, ac = 1, und abc = 8″, 65, also daraus cb bekannt = 23846. Da nun die elliptische Bahn der Erde um die Sonne von einer kreisförmigen sehr wenig abweicht, d. h. die

Excentrizität Cb als verschwindend angesehen werden kann, so ist ungefähr a oder cC $= cb = 23846$. Da $A^2 = C. 2g$ nur dann wahr ist, wenn die angenommene Längeneinheit der Erdhalbmesser ist, bei beliebig angenommener Längeneinheit der Länge hingegen $A^2 = C. \varrho\varrho. e. g$, so ist bei jeder angenommenen Einheit der Länge $\frac{2a^3 \; e \; \pi^2}{T^2}$ $= C. \varrho. \varrho. e. g$ oder $C = \frac{2. \; a^3. \; \pi^2}{\varrho. \; \varrho. \; g. \; T^2}$, hingegen blos dann $\frac{2a^3. \; e \, \pi^2}{T^2} = C. \; eg$ oder $C = \frac{2a^3. \; \pi^2}{g. \; T^2}$, wenn die angenommene Längeneinheit der Erdhalbmesser, in beiden Fällen aber ist als Einheit des Gewichts für C angenommen das Gewicht der absoluten Centralkraft der Erde. Dass aber T in Sekunden ausgedrückt seyn müsse, sagt Herr Schubert falsch; denn es liegt in allem Vorhergehenden nirgends die Bedingniss hiezu, auch zeigt sich diese Unrichtigkeit sogleich wenn man probirt, T statt durch Sekunden z. B. durch Minuten auszudrücken. Sey z. B. $a = 10$ Erdhalbmesser, $g = g$. Erdhalbmesser, $T = 20$ Sekunden, so $C = \frac{2. \; 10^3. \; \pi^2}{g. \; 10^2}$. Hier ist g der in der ersten Sekunde von einem schweren Körper auf der Oberfläche der Erde durchlaufene Raum; es wäre der von demselben Körper in den ersten 60 Sekunden oder in der ersten Minute seines Falls durchlaufene Raum $= g. \; 60^2$, nehme ich also hier als Einheit der Zeit eine Minute, so ist die Zeit T oder 20 Sekunden $= \frac{20}{60}$ Minuten, also $T^2 = \frac{20^2}{60^2}$, also $C = \frac{2. \; 10^3. \; \pi^2}{g. \; 60^2. \; \frac{20^2}{60^2}} = \frac{2. \; 10^3. \; \pi^2}{g. \; 20^2}$, also C dieselbe Zahl als vorhin. Die Längeneinheit darf aber hier nicht geändert werden, nehme ich z. B. $\frac{1}{2}$ Erdhalbmesser als Längeneinheit an, so ist $a = 20$ $(g = 2g)$ also $\frac{2. \; 20^3. \; \pi^2}{2g. \; 20^2}$ oder $\frac{2. \; 2^3. \; 10^3. \; \pi^2}{2. \; g. \; 20^2}$ nicht dieselbe Zahl als $\frac{2. \; 10^3. \; \pi^2}{g. \; 20^2}$, wohl aber erhält man nach der Formel $C = \frac{2. \; a^3. \; \pi^2}{\varrho. \; \varrho. \; g. \; T^2}$ einerlei Zahl für $a = 2a$, $g = 2g$, $\varrho = 2\varrho$, denn $\frac{2. \; 2^3. \; a^3. \; \pi^2}{2. \; \varrho. \; 2. \; \varrho. \; g. \; T^2} = \frac{2. \; a^3. \; \pi.}{\varrho. \varrho. \varrho. \; T^2}$.

Ad S. 35. Z. 5. Es ist (§. 26.) bewiesen worden, dass in einer und derselben Planetenbahn die beschleunigenden Kräfte der Centralkraft der Sonne sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom Konzentrirungspunkte dieser Centralkraft verhalten;

ist nemlich z. B. S (Taf. III. Fig. 9.) dieser Konzentrirungspunkt, um welchen sich in den hier gezeichneten 2 elliptischen Bahnen 2 Planeten bewegen, und wir nennen die in b, e, c, d, bestehenden beschleunigenden Kräfte B, E, C, D, so ist ($B : E = Se^2 : Sb^2$) $C : D = Dd^2 : Sc^2$, es soll aber in diesem §. 28. bewiesen werden, dass wenn man auch von einer Planetenbahn zur andern übergeht, nemlich die beschleunigende Kraft in d mit jener in e vergleicht, dass auch dann $D : E = Se^2 : Sd^2$; diess wird dann bewiesen seyn, wenn (wie §. 28. gezeigt wird) erwiesen ist, dass von den zwei Punkten c, b des Apheliums wahr ist,

$C : B = Sb^2 : Sc^2$; dann $B : E = Se^2 : Sb^2$, $B = \frac{E. Se^2}{Sb^2}$, dann

$C : D = Sd^2 : Sc^2$, $C = \frac{D. Sd^2}{Sc^2}$, ist also

$C : B = Sb^2 : Sc^2$, so ist $\frac{D. Sd^2}{Sc^2} : \frac{E. Se^2}{Sb^2} = Sb^2 : Sc^2$ oder

$\frac{D. Sd^2}{Sc^2} \cdot Sc^2 = \frac{E. Se^2}{Sb^2} \cdot Sb^2$ oder $D : E = Se^2 : Sd^2$.

Ad S. 35. Z. 27. Es ist nemlich $\cos. d\varphi \sqrt{1 - \sin^2 d\varphi} = \sqrt{1 - d\varphi} = (1 - d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} =$ (Seite 803) $= 1^{\frac{1}{2}} + (-\tfrac{1}{2})\, 1^{\frac{1}{2}-1}\, d\varphi^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2}\, 1^{\frac{1}{2}-2} + \ldots\ldots$ $= 1 - \tfrac{1}{2}\, d\varphi^2$. Dieser Fall kann zum Beweis dienen, dass es oft vortheilhaft sey, das Verschwinden der Nullen nicht mitten in der Rechnung, sondern erst im Resultate derselben vorzunehmen, denn aus $\cos. d\varphi = 1$ erhielte man hier nichts zur weitern Folgerung.

Ad S. 36. Z. 27. Man bemerke, dass in der ganzen Beweisführung §. 28. nirgends die Bedingung vorausgesetzt wird, dass die Punkte P, Q (Taf. IV. Fig. 1) der Aphelien der Planeten P, Q in einerlei geraden Linie SQP (Fig. 3.) liegen, auch nicht einmal, dass die Ebenen der Bahnen P, p, und Qq in einerlei Ebene liegen, daher an der Allgemeinheit dieses Beweises nicht im geringsten gezweifelt werden darf.

Ad S. 37. Z. 30. Dieser Unterschied des Gesetzes, wornach bey gegebenen Entfernungen die Wirkung eines leuchtenden Körpers auf dunkle Körper, und die Wirkung eines anziehenden Körpers auf angezogene Körper sich richtet, liesse sich (wenn wir anders die Erleuchtung und die Centralkraft durch strahlenförmig auslaufende leuchtende Linien und Attraktionslinien erklären wollen) vielleicht dadurch begreiflich machen, dass man zwischen der Wirkung eines Lichtstrahls und eines Attraktionsstrahls folgenden be-

deutenden Unterschied annehmen möchte. Die Wirkung eines Lichtstrahls erstreckt sich vom leuchtenden Punkte an bis auf den nächsten undurchsichtigen Punkt; hingegen erstreckt sich die Wirkung eines Attraktionsstrahls bis zu der ihm vorgesetzten Grenze (ob diese nun ihrer Natur nach vom Centralpunkte endlich oder unendlich weit entfernt sey, darf hier nicht entschieden werden), es mögen in der geraden Linie dieses Strahls wie viel immer und wie immer von einander entfernte materielle der Anziehung fähige Punkte liegen. Liegen also in einem Lichtstrahle a undurchsichtige Punkte hinter einander, so ist die Beleuchtung dieses Körpers von a Punkten dieselbe als jene eines Körpers von in diesem Strahle liegenden b undurchsichtigen Punkten; liegen hingegen in einem Attraktionsstrahle einmal a materielle Punkte und einmal b materielle Punkte hinter einander: so verhält sich die Menge der Attraktion des ersten und zweiten Körpers $= a : b$, daraus u. s. w.

Ad S. 39. §. 30. In den Differentialgleichungen (III. Kapitel. §. 17. §. 18.) war P die beschleunigende Kraft der von einer Centralkraft angezogenen Masse, in der Entfernung vom Konzentrirungspunkte dieser Centralkraft während der Zeit dt, während des Raums ds, ..., nemlich P das unter diesen Umständen auf die Einheit der angenommenen Masse ausfallende Gewicht; also P die Zahl, welche anzeigt, wie oft die angenommene Einheit des Gewichts genommen werden müsse, um dieses Gewicht P zu erhalten; als Einheit des Gewichts wurde aber bisher immer angenommen das Gewicht der angenommenen Einheit der Masse nahe an der Oberfläche unserer Erde, oder in der Entfernung f vom Konzentrirungspunkte der Centralkraft (§. 27.). In dieser Bedeutung wird auch hier die Grösse P und die Zahl P genommen.

Ad S. 40. Z. 12. Das ist so zu verstehen:

Der Ausdruck $-u^2 + \frac{4g.\ f^2.\ m^2.\ u}{A^2} - \frac{B.\ m^4}{A^2}$ gleich Null gesetzt, giebt für u die Werthe oder Wurzeln

$\frac{m^2}{A^2}(2g.\ f^2 + \sqrt{4g^2.\ f^4 - A^2 B})$ und $\frac{m^2}{A^2}(2g.\ f^2 - \sqrt{4g^2.\ f^4 - A^2 B})$ oder

$\frac{m^2}{A^2}(2g.\ f^2.\ \pm \sqrt{4g^2.\ f^4 - A^2 B})$; denn es folgt aus

$$-u^2 + \frac{4g.\ f^2.\ m^2.\ u}{A^2} - \frac{B\ m^4}{A^2} = o,\ \left(u^2 - \frac{4g.\ f^2.\ m^2.\ u}{A^2} + \frac{B.\ m^4}{A^2} = o\right)\ u =$$

$$\frac{4g.\ f^2.\ m^2}{2.\ A^2} \pm \sqrt{\frac{4.\ 4.\ g^2.\ f^4.\ m^4}{2.\ 2.\ A^4} - \frac{B.\ m^4}{A^2}} = \frac{2g.\ f^2.\ m^2}{A^2} \pm \frac{m^2}{A}\sqrt{\frac{4.\ g^2.\ f^4 - B}{A^2}} =$$

$= 2g.\,f^2\,\frac{m^2}{A^2} \pm \frac{m^2}{A^2}\sqrt{4g.\,f^4. - B\,A^2} = \frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 \pm \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})$; daraus folgt auch, dass $\left[da - u^2 + \frac{4g.\,f^2.\,m^2\,u}{A^2} - \frac{B.\,m^4}{A^2} = -1\left(u^2 - \frac{4g.\,f^2\,m^2.\,u}{A^2} + \frac{B.\,m^4}{A^2}\right)\right.$, und da (Seite 73) $u^2 - \frac{4g.\,f^2.\,m^2.\,u}{A^2} + \frac{B.\,m^4}{A^2} = \left(u - \frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 + \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})\right) \times \left(u - \frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 - \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})\right)\Big]$ dass $-u^2 + \frac{4g.\,f^2.\,m^2.\,u}{A^2} - \frac{B.\,m^4}{A^2} = -1 \times \left(u - \frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 + \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})\right)\left(u - \frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 - \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})\right)$ wo also die Faktoren des Ausdruckes $-u^2 + \frac{4g.\,f^2.\,m^2.\,u}{A^2} - \frac{B.\,m^4}{A^2}$ oder wenn $\frac{Z^2}{A}$ bekannt sind. Hieraus folgt aber weiter $\frac{Z^2}{A^2} = \left(\frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 + \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2}) - u\right) \times \left(u - \frac{m^2}{A^2}\,(2g.\,f^2 - \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})\right)$, $Z^2 = \left(\frac{m^2}{A}\,(2g.\,f^2 + \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2}) - A.\,u\right) \times \left(A.\,u - \frac{m^2}{A}\,(2g.\,f^2 - \sqrt{4g^2.\,f^4 - B\,A^2})\right)$.

Ad S. 40. Z. 15. Denn $d\varphi = -\frac{A^2.\,du}{\sqrt{m^4.\,k^6 - (m^2.\,n^3 - A^2.\,u)^2}} =$

$(m^4.\,k^6 = B^2,\; m^2.\,n^3.\,A^2.\,u = z) = -\frac{A^2.\,du}{\sqrt{B^2 - z^2}} = -\frac{\frac{A^2}{B}.\,du}{\frac{\sqrt{B^2 - z^2}}{B}} =$

$\frac{-\frac{A^2}{B}.\,du}{\frac{\sqrt{B^2 - z^2}}{\sqrt{B^2}}} = \frac{-\frac{A^2}{B}.\,du}{\sqrt{\frac{B^2 - z^2}{B^2}}} = \frac{-\frac{A^2}{B}.\,du}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{B^2}}} = (d\,(m^2.\,n^3 - A^2.\,u) = dz$ oder

$-A^2.\,du = dz$ oder $du = -\frac{dz}{A^2}) = \frac{\frac{A^2.\,dz}{B.\,A^2}}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{B^2}}} = \frac{\frac{dz}{B}}{\sqrt{1 - y^2}} =$ (wenn

$\frac{z^2}{B^2} = y^2, = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, also φ = Arc. Sin y + C = Arc. Sin $\left(\frac{z}{B}\right)$ + C = Arc. Sin $\left(\frac{m^2. n^3 - A^2 u}{B}\right)$ + C = Arc. Sin $\left(\frac{m^2. n^3 - A^2 u}{m^2. k^3}\right)$ + C also φ = Arc. Sin. $\left(\frac{m^2. n^3 - A^2. u}{m^2. k^3}\right)$ + C.

Ad S. 40. Z. 17. Man bemerke hier folgendes: Die Gleichung $d\varphi = \frac{-A^2 du}{\sqrt{\ldots\ldots}}$, folglich auch jene φ = C + Bogen findet in dem (§. 18, 19, 20, 21.) angenommenen Falle Statt. Da nun hier die Bedingnisse der Aufgabe gar nicht bestimmen, wie gross u seyn müsse für $\varphi = 0$, so kann ich willkürlich annehmen, dass wenn $\varphi = 0$, so soll u = ... seyn, [so wie ich z. B. eine und dieselbe Kurve durch die Gleichung (x, y Abscisse, Ordinate) y = F (x) oder y = F (x) + a, (Taf. IV. Fig. 2.) oder y = F (x) + b, ... ausdrücken kann. Ist nemlich, wenn ich x von m an zähle, y = F (a), so ist, wenn ich x von n an zähle, y = F (x) + a, und wenn ich x von k an zähle y = F (x) + b in einer und derselben Kurven AB], und da ist es am besten für $\varphi = 0$ einen solchen dem $\varphi = 0$ entsprechenden Werth von u anzunehmen, dass man hierdurch für die Rechnung den grössten Vortheil erreiche; dass aber der Werth von u für $\varphi = 0$ ganz willkürlich sey, folgt hieraus: Es ist im vorliegenden Falle φ = C + Arc Sin $\left(\frac{m^2. n^3 - A^2. u}{m^2. k^3}\right)$ oder da $r = \frac{m^2}{u}$, also $u = \frac{m^2}{r}$, auch φ = C + Arc Sin $\left(\frac{m^2. n^3}{m^2. k^3} - \frac{A^2. m^2}{m^2. k^3. r}\right)$ oder φ = C + Arc. Sin $\left(\frac{n^3}{k^3} - \frac{A^2}{k^3. r}\right)$.

Diese Gleichung findet zwischen φ und r Statt, nemlich (Fig. 1.) zwischen MCN und MC eben so zwischen φ = ACA = 0 und AC; nun ist aber nirgend eine Bedingniss noch vorgekommen, welche bestimmen möchte, wie gross dieses AC seyn müsse, daher es willkürlich ist; ist aber für $\varphi = 0$ dessen r willkürlich, so ist auch für $\varphi = 0$ dessen u willkürlich; denn u ist eine Funktion von r, nemlich $u = \frac{m^2}{r}$. Hier wird nun zur Erleichterung der Rechnung angenommen, dass für $\varphi = 0$, dessen entsprechendes u folgenden Werth habe. Es ist:

$$\frac{Z^2}{A^2} = \left(\frac{m^2}{A^2}(n^3 + \sqrt{k^6}) - u\right)\left(u - \frac{m^2}{A^2}(n^3 - \sqrt{k^6})\right)$$

$$= \left(\frac{m^2}{A^2}(n^3 + k^3) - u\right)\left(u - \frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3)\right), \text{ also wird:}$$

$$\frac{Z^2}{A^2} = 0, \text{ wenn } \left(\frac{m^2}{A^2}(n^3 + k^3) - u\right)\left(u - \frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3)\right) = 0,$$

also entweder, wenn $\frac{m^2}{A^2}(n^3 + k^3) - u = 0$, oder wenn $u - \frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3) = 0$,

also entweder, wenn $u = \frac{m^2}{A^2}(n^3 + k^3)$ oder wenn $u = \frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3)$, in diesem Falle muss aber auch $Z = 0$ seyn, da A eine endliche und beständige Grösse ist, die (§. 19. Astr.) durchs Integriren in Rechnung gekommen. Hier wird nun angenommen, dass φ dann $= 0$ seyn soll, wenn $u = \frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3)$, also wenn $z = 0$ ist. Es ist also folgende Gleichung wahr: [Dieser Annahme zufolge, und da überhaupt $\varphi = C + \text{Arc. Sin}\left(\frac{m^2.\ n^3 - A^2.\ u}{m^2.\ k^3}\right)$] $0 = C +$

$$\text{Arc. Sin}\left(\frac{m^2.\ n^3 - A^2\left(\frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3)\right)}{m^2.\ k^3}\right) \text{ oder}$$

$$0 = C + \text{Arc. Sin}\left(\frac{m^2.\ n^3 - (m^2.\ n^3 - m^2\ k^3)}{m^2.\ k^3}\right) =$$

$C + \text{Arc. Sin } 1.$, also $C = - \text{Arc. Sin } 1. = - \frac{\pi}{2}$; also allgemein

$\varphi = \text{Arc. Sin}\left(\frac{m^2.\ n^3 - A^2\ u}{m^2.\ k^3}\right) - \frac{\pi}{2} =$ [hier heisst $\frac{\pi}{2}$ der rektifizirte Bogen *pro radio* $= 1$ in Graden gemessen $= 90°$] $=$

$- \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc. Sin}\left(\frac{m^2.\ n^3 - A^2.\ u}{m^2.\ k^3}\right)\right) =$ [(Taf. I. Fig. 16.)

$\text{Arc. Sin } b = hl$, also $\frac{\pi}{2} - \text{Arc. Sin } b = \frac{\pi}{2} - hl = hg = \text{Arc. Cos } b.$]

$= - \text{Arc. Cos}\left(\frac{m^2.\ n^3 - A^2\ u}{m^2.\ k^3}\right)$ oder ohne Rücksicht auf $\pm$ sondern blos der

Grösse nach φ = Arc. Cos $\left(\frac{m^2. n^3 - A^2. u}{m^2. k^3}\right)$ also ist

$\frac{m^2. n^3 - A^2 u}{m^2 k^3} = \text{Cos } \varphi$, [$m^2 n^3. A^2 u = m^2 k^3. \text{Cos } \varphi$,

$A^2 u = m^2 n^3 - m^2 k^3 \text{ Cos } \varphi$, $A^2 u = m^2 (n^3 - k^3 \text{ Cos } \varphi)$]

aber $A^2 u = A^2. \frac{m^2}{r}$ also:

$\frac{A^2. m^2}{r} = m^2 (n^3 - k^3 \text{ Cos } \varphi)$, $\left[\frac{A^2}{r} = n^3 - k^3 \text{ Cos } \varphi\right]$

$A^2 = r (n^3 k^3 \text{ Cos } \varphi)$, $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3. \text{Cos } \varphi}$.

Ad S. 40. Z. 21. Ehe wir weiter gehen ist folgende Bemerkung zu machen: Aus $\frac{Z^2}{A^2} = \ldots\ldots$ oder $Z^2 = A^2 (\ldots\ldots)$ oder:

$$Z = \pm A \sqrt{\left(\left(\frac{m^2}{A^2} (n^3 + k^3) - u\right) \left(u - \frac{m^2}{A^2} (n^3 - k^3)\right)\right)}$$

folgt, dass wenn nach dieser Gleichung eine Kurve konstruirt wird, wo u die Abscisse und z die Ordinate, dass z bei folgenden Werthen von u zu Null wird, $u = \frac{m^2}{A^2} (n^3 + k^3)$ oder $u = \frac{m^2}{A^2} (n^3 - k^3)$, also dass diese Kurve ihre Abscissenlinie in 2 Punkten schneiden müsse, nemlich in denen 2 Endpunkten von $u = \frac{m^2}{A^2} (n^3 + k^3)$ und von $u = \frac{m^2}{A^2} (n^3 - k^3)$, wofern diese zwei Werthe von u reelle und nicht imaginäre Werthe sind, oder wenn die Faktoren von $Z^2 = A^2 (\)(\)$ reel sind. Die Imaginärität könnte hier nur im Ausdrucke:

$\pm \sqrt{4. g^2. f^4 - A^2. B} = \pm \sqrt{n^6 - A^2 B} = \pm \sqrt{k^6} = \pm k^3$

liegen, es hätte also in der nach der Gleichung $Z = \pm A \sqrt{(\)(\)}$ konstruirten Kurven die Ordinate Z für jede Abscisse u zwei unmögliche Werthe, daher diese Kurve etwas Imaginäres Unmögliches wäre; eben so wäre denn auch die nach der Gleichung $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \text{ Cos } \varphi}$ konstruirte Kurve AMmB eine imaginäre Kurve [wo φ den rektifizirten Bogen *pro radio* 1 den Winkel ACM messend, und r den *radius vector* CM, der φ entspricht, ausdrücken (Fig. 1.)]. In allen jenen Fällen

aber, wo sich (Fig. 1.) die Masse M um den Konzentrirungspunkt C der Centralkraft wirklich bewegt, kann φ keine imaginäre Grösse seyn; da uns also die Erfahrung lehrt, dass die Planeten um die Sonne nach den 3 Kepplerischen Gesetzen (§. 24.) wirklich laufen, woraus (§. 25.) bewiesen worden, dass diess durch die im Standpunkte der Sonne konzentrirte Centralkraft derselben erfolge, so ist bei der Bewegung jedes Planeten um diesen Standpunkt der Sonne φ eine wirkliche reelle Grösse, wodurch auch die nach der Gleichung $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \cdot \text{Cos}\,\varphi}$ konstruirte Kurve AMm (Fig. 1.) eine wirkliche mögliche Kurve ist, welche nemlich, wenn vom Laufe eines Planeten um die Sonne die Rede ist, die Bahn dieses Planeten anzeigt. Da die Imaginärität nur in k^3 bestehen könnte, so folgt, dass [wenn von der Bewegung eines Planeten um die Sonne, oder überhaupt von einer wirklichen Bewegung um den Konzentrirungspunkt einer Centralkraft die Rede], ein solches Verhältniss unter allen Grössen bestehen müsse, damit $k^3 = \sqrt{k^6} = \sqrt{n^6 - A^2 B}$ nie imaginär werden könne, es muss also denn allemal $n^6 > A^2 B$ oder $n^3 > A \sqrt{B}$ seyn. Aus der zwischen r und φ Statt findenden Gleichung für einen solchen Fall, sieht man, dass die darnach konstruirte Kurve (Fig. 1.) AMmB die Gerade PB in 2 Punkten, aber auch nur in 2 Punkten*) schneide ($\varphi = ACM, r = CM$), nemlich in jenen von C nach A und

*) Dass die nach der Gleichung $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \text{ Cos } \varphi}$ konstruirte Kurve die PB nur in zwei Punkten schneide, folgt hieraus: Es folgt aus $r = \frac{A^2}{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot}$ $[n^3 r - k^3 . r . \text{Cos}\,\varphi = A^2]$ $\text{Cos}\,\varphi = \frac{A^2 - n^3 . r}{k^3 . r}$, um nun die Werthe von r zu finden, bei denen $\varphi = 0$ oder $= 180°$ wird [nothwendige Bedingniss des Schneidens der Kurve mit PB] bei denen also $\text{Cos}\,\varphi = 1$ oder $\text{Cos}\,\varphi = -1$ wird, sage $\frac{A^2 - n^3 . r}{k^3 . r} = 1$ oder $\frac{A^2 - n^3 . r}{k^3 . r} = -1$; aus ersterem folgt $r = \frac{A^2}{n^3 + k^3}$, aus letzterem folgt $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3}$. Es entsprechen also nur diese 2 Werthe von r der Bedingniss $\text{Cos}\,\varphi = 1$ und $\text{Cos}\,\varphi = -1$ oder $\varphi = 0$ und $\varphi = 180°$, oder der Bedingniss des Schneidens.

nach B gemessenen Entfernungen (in der Figur durch CA und CB dargestellt), welche die Werthe von r für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^\circ$ ausdrücken, wo dann:

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 . \operatorname{Cos} \varphi} = \frac{A^2}{n^3 - k^3 . 1} = \frac{A^2}{n^3 - k^3}, \text{ und}$$

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \operatorname{Cos} 180^\circ} = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \times - 1} = \frac{A^2}{n^3 + k^3}$$ (also in der Figur:

$$CA = \frac{A^2}{n^3 - k^3} \text{ und } CB = \frac{A^2}{n^3 + k^3}).$$ Ferner folgt aus:

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \operatorname{Cos} \varphi},$$ dass jedem gleich grossen positiven und negativen Werth von φ z.B. (Taf. II. Fig. 9.) $\varphi = + \alpha$ und $\varphi = - \alpha$, ein gleich grosser Radius vector r entspreche, nemlich $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \operatorname{Cos} (+\alpha)}$ und $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \operatorname{Cos} (-\alpha)}$, da $\operatorname{Cos} (+ \alpha) = hb$ und $\operatorname{Cos} (- \alpha) = hb$, dass also der über und unter der PB laufende Kurvenast der Kurven AMmB einander gleich und ähnlich; da ferner aus:

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \operatorname{Cos} \varphi}$$ für jeden positiven und eben so negativen Werth von $\varphi = + \alpha$ und $= - \alpha$ nur ein Werth für r folgt, auch dieser Werth allemal derselbe bleibt, man mag φ den Werth $+ \alpha \pm h . 2\pi$ oder $- \alpha \pm h\, 2\pi$ annehmen, [h jede beliebige ganze Zahl; $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} (\alpha + h . 2\pi)$], so kann die Kurve AMmB auch nur einen Kurvenast sowohl über als unter PB haben. Würde AB als Abscissenlinie angenommen, worauf von C nach A und B die positive und negative Abscissen x gemessen, und auf H deren Endpunkte die senkrechten Koordinaten y aufgetragen würden: so müsste nach diesem Koordinatensystem für die Kurve AMmB eine solche Gleichheit zwischen x, y bestehn, dass für $x = CA$, $y = 0$, also auch $y^2 = 0$ und für $x = CB$, $y = 0$ also auch $y^2 = 0$ heisst; und zwar da jedem x eine gleich grosse positive und negative Ordinate y entsprechen müsste, von der Form $y = \pm f(x)$ also $y^2 = f(x)^2 = F(x)$: soll aber F (x) für die 2 Werthe, aber auch nur für die 2 Werthe $x = CA$, $x = CB$ zu Null werden, so muss F (x) dann $(x - CA)(x - CB)$ seyn, da y^2 nur bei den Werthen $x = CA$ und $x = CB$ zu Null werden kann, und da dann durch Substitution $x = CA$, und $x = CB$, das y^2 zu Null wird. Es ist also die Kurve AMmB eine Kurve des zweiten Grades, und PB ein Diameter für die Sehnen die durch PB senkrecht laufen, also PB unter den unendlich vielen Diame-

tern dieser Kurve des 2ten Grades eine der 2 Axen. Die zwischen x und y hier Statt findende Gleichung isst also allgemein $y^2 = (x - \frac{A^2}{n^3 - k^3}) \times$ $(x - \frac{A^2}{n^3 - k^3})$. In dieser Kurven des 2ten Grades kann es (Seite 202) nur zwei Axen geben, diese sind AB und HI, (Taf. IV. Fig. 2.) wenn die AB halbirt und HI $\perp$ AB. Hier ist:

$$AB = AC + CB = \frac{A^2}{n^3 - k^3} + \frac{A^2}{n^3 \times k^3}, \text{ also:}$$

$$\frac{AB}{2} = AE = EB = \frac{A^2}{2(n^3 - k^3)} + \frac{A^2}{2(n^3 + k^3)}.$$ Da aus

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 . \text{Cos}\,\varphi}$$ für $\varphi = + 90°$ und $\varphi = - 90°$, folgt:

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \text{ Cos } 90} = \frac{A^2}{n^3 - k^3 . 0} = \frac{A^2}{n^3}$$ und

$$r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 . \text{Cos}(-90)} = \frac{A^2}{n^3 - k^3 . 0} = \frac{A^2}{n^3},$$ so ist:

$CS = \frac{A^2}{n^3}$ und $CS' = \frac{A^2}{n^3}$, also $SS' = \frac{2A^2}{n^3}$, ... Alle diese Betrachtungen dienen, um zu zeigen, was hier für analytische Folgerungen zu machen. Nun weiter zu §. 31.

Ad S. 41. §. 31. Das ist so zu verstehen: aus $d\varphi = \frac{-A\,du}{\sqrt{z^2}}$ folgt $d\varphi \sqrt{z^2} = -A\,du$, $du = \frac{d\varphi \sqrt{z^2}}{A}$; nun folgt aus

$$d\varphi = \frac{-A . du}{\sqrt{(-A^2u^2 + 2m^2 . n^3 . u - Bm^4.)}},$$ dass $d\varphi$ imaginär wird, wenn $2m^2 . n^3u < A^2u^2 + Bm^4$; also dann die Bewegung φ auch imaginär; eben so folgt aus

$$du = \frac{d\varphi \sqrt{-(A^2u^2 - 2m^2 . n^3u - Bm^4)}}{A}$$ oder

$$du = \frac{d\varphi \sqrt{-(A^2u^2 - 2m^2 . n^3 . u + Bm^4)}}{A},$$ dass du also auch a imaginär

wird, so oft $A^2 u^2 - 2m^2. n^3. u + Bm^4 = +$ [denn ist es z. B. $= -$ H, so ist $\sqrt{-(-H)} = \sqrt{H}$, ist es aber $= +$ H so ist $\sqrt{-(+H)} = \sqrt{-H}$], sind also A, m, n, B, gegeben, so wird du also auch u unmöglich, so oft durch dessen Substitution in $A^2 u^2 - 2m^2. n^3. u + Bm^4$ dieser Ausdruck positiv würde. Da nun $u = \frac{m^2}{r}$, so wird also auch jeder Werth von r unmöglich, wodurch $\frac{A^2. m^4}{r^2} - 2m^2. n^3. \frac{m^2}{r} + B m^4$ unmöglich würde; oder auch es wird jeder Werth von r unmöglich durch dessen Substitution $\frac{A^2. m^4}{r^2} + B. m^4 > \frac{2m^2 n^3 m^2}{r}$. Nun ist aber:

$$\frac{A^2. m^4}{r^2} - \frac{2. m^2. n^3. m^2}{r} + B. m^4 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{A. m^4. r^2}{r^2} - \frac{2m^2. n^3. m^2. r^2}{r} + B. m^4. r^2\right) = \frac{1}{r^2}(B. m^4 r^2 - 2. m^2. n^3. m^2. r + A^2. m^4);$$

ferner folgt aus:

$$[B. m^4. r^2 - 2m^2. n^3. m^2. r + A^2 m^4 = 0]\ r^2 - \frac{2m^2. n^3. m^2. r}{B. m^4} + \frac{A^2. m^4}{B. m^4} = 0,\ r^2 - \frac{2. n^3. r}{B} + \frac{A^2}{B} = 0,\ r = \frac{2n^3}{2. B} \pm \sqrt{\frac{n^6}{B^2} - \frac{A^2}{B}} = \frac{n^3}{B} \pm \sqrt{\frac{n^6 - A^2. B}{B^2}} = \frac{n^3}{B} \pm \frac{\sqrt{n^6 - A^2 B}}{B} = \frac{n^3 + {}^3}{B},$$

es verschwindet also der Ausdruck $Bm^4 r^2 - \ldots\ldots$ also auch jener $\frac{1}{r^2}(Bm^4 r^2 - \ldots)$ also auch jener $\frac{A^2. m^4}{r^2} - \ldots\ldots$ wenn $r = \frac{n^3 + k^3}{B}$ oder $= \frac{n^3 - k^3}{B}$ substituirt wird, oder (da $[n^6 - A^2 B = k^6]$ also $A^2 B = n^6 - k^6$, $B = \frac{n^6 - k^6}{A^2}$, $B = \frac{(n^3 + k^3)(n^3 - k^3)}{A^2}$) wenn $r = (n^3 + k^3) : \frac{(n^3 + k^3)(n^3 - k^3)}{A^2} = \frac{(n^3 + k^3) A^2}{(n^3 + k^3)(n^3 - k^3)} = \frac{A^2}{n^3 - k^3}$, oder wenn

$r = (n^3 - k^3) : \frac{(n^3 + k^3)(n^3 - k^3)}{A^2} = \frac{(n^3 - k^3) A^2}{(n^3 + k^3)(n^3 - k^3)} =$

$\frac{A^2}{n^3 + k^3}$ substituirt wird, also mit einem Worte, wenn $r = \frac{A^2}{n^3 \pm k^3}$ in diesem Ausdrucke substituirt wird. Alle zwischen $\frac{A^2}{n^3 + k^3}$ und $\frac{A^2}{n^3 - k^3}$ oder die zwischen p und q liegenden Werthe geben in $\frac{A^2 . m^4}{r}$ — oder in $A^2 . u^2 - 2 m^2 . n^3 + B . m^4$ statt r, oder $\frac{m^2}{u}$ substituirt ein negatives Resultat; es sind also zwischen p und q liegende Werthe mögliche Werthe von r; ferner geben alle Werthe $< p$ oder $> q$ in $\frac{A^2 m^4}{r}$ oder in $A^2 . u^2$. statt r oder $\frac{m^2}{u}$ substituirt ein positives Resultat, daher sind die möglichen Werthe von r alle zwischen p und q enthalten.

Ad S. 43. Z. 12. Nemlich es folgt aus $\frac{A . du}{d\varphi} = -\sqrt{z^2} =$

$-\sqrt{-\left(\frac{A^2 m^4}{r^2} - 2 m^2 n^3 . \frac{m^2}{r} + B . m^4\right)}$, für $r = p$ und $r = q$, wo

$\frac{A^2 . m^4}{r^2}$ $= 0$, ist $\overbrace{\frac{A . du}{d\varphi}}^{r = p} = -\sqrt{0}$ und $\overbrace{\frac{A . du}{d\varphi}}^{r = q} = -\sqrt{0}$, also

$\overbrace{\frac{du}{d\varphi}}^{r = p} = 0$ und $\overbrace{\frac{du}{d\varphi}}^{r = q} = 0$ $\left[\overbrace{r = p}\ \overbrace{r = q}\right.$ heisst, wenn A in dem Ausdruck $\frac{du}{d\varphi}$, wo u eine Funktion von r (nemlich $u = \frac{m^2}{r}$) statt r substituirt wird p, oder q; es ist nemlich $u = f(\varphi)$ [$f(\varphi)$ Funktion von φ] also $du = f'(\varphi)\, d\varphi$ und $\frac{du}{d\varphi} = \frac{f'(\varphi)\, d\varphi}{d\varphi}$ nach *Lagrange* Bezeichnung; nun ist φ eine Funktion von r, z. B. $\varphi = f(r)$ also $f'(\varphi) = f'(f(r)) = F(r)$ also heisst:

$$\underbrace{\frac{du}{d\varphi}}_{r=p} = F(p), \text{ und } \underbrace{\frac{du}{d\varphi}}_{r=q} = F(q) \Big]$$, oder da:

$$u = \frac{m^2}{r} \text{ und } du = -\frac{u\,dr}{r} \text{ so ist } - \underbrace{\frac{u.\,dr}{r.\,d\varphi}}_{r=p} = \varphi \text{ und}$$

$$- \underbrace{\frac{u.\,dr}{r.\,d\varphi}}_{r=q} = o, \text{ oder } \underbrace{\frac{dr}{d\varphi}}_{r=p} = \frac{o.\,r}{-u} = o \text{ und } \underbrace{\frac{dr}{d\varphi}}_{r=q} = \frac{o.\,r}{-u} = o, \ (r = F^{+}(\varphi),$$

also $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{F^{+\prime}(\varphi) \cdot d\varphi}{d\varphi}$ also:

$\underbrace{F^{+\prime}(\varphi)}_{r=p} = \underbrace{F^{+\prime}(\varphi)}_{\varphi=180^\circ}$, denn wenn $r = p$ so ist $\varphi = 180^\circ$, also $\underbrace{F^{+\prime}(\varphi)}_{\varphi=180^\circ} = o$, eben so $\underbrace{F^{+\prime}(\varphi)}_{\varphi=o} = o$. Es ist also $F^{+}(\varphi)$ oder r bei den Werthen $\varphi = o$ und $\varphi = 180^\circ$ ein *max.* oder *min.*; $F^{+}(\varphi)$ oder r für $\varphi = o$ oder 180° ist aber $= \frac{A^2}{n^3 - k^3\ \text{Cos.}\ o} = \frac{A^2}{n^3 - k^3} = q$ und $= \frac{A^2}{n^3 - k^3.\ \text{Cos.}\ 180} = \frac{A^2}{n^3 - k^3} = p$, also q der grösste oder kleinste Werth von r, also das Kurvenelement das p und q begrenzt $\perp$ auf p und q, denn wäre ab nicht $\perp$ auf q, so ist q kein *max.*, da $Cb > q$, (Taf. IV. Fig. 4.) eben so wenn mn nicht $\perp$ q, so ist p kein *min.*, denn $Cm < p$.

Ad S. 42. Z. 27. Es ist nemlich bei einer Kurven des zweiten Grades, oder allgemein bei jedem Kegelschnitte, der entweder Ellipse, (Kreis), Hyperbel, Parabel, ist; wenn die Abscisse x vom Scheitel auf jener der 2 Axen, deren Hälfte = a ist, gemessen, und darauf die Ordinaten y senkrecht stehen, und deren Parameter $= \mathfrak{P}$, die Gleichung wahr: $y^2 = \mathfrak{P}.\ x - \frac{\mathfrak{P}}{2a}.\ x^2$; diese Gleichung entspricht einer Ellipse, wenn $\frac{\mathfrak{P}}{2a} = +$, einer Hyperbel, wenn $\frac{\mathfrak{P}}{2a} = -$, einer Parabel, wenn $\frac{\mathfrak{P}}{2a} = o$, oder 2a also auch

$a = \infty$. Setzen wir nun $\frac{A^2}{g f^2} = \mathfrak{P}$, $\frac{2 g f^2}{B} = a$, also $\frac{4 g f^2}{B} = 2 a$, so ist bei unserer Kurven (Fig. 1.) AMm, die Gleichung wahr:

$$\left(y^2 = \frac{A^2}{g . f^2} . x - \frac{A^2 . B}{4 g^2 f^4} x^2,\ y^2 = \frac{A^2}{g . f^2} . x - \frac{A^2}{g . f^2} . \frac{B}{4 g . f^2} . x^2,\right.$$

$$\left. y^2 = \frac{A^2}{g . f^2} . x - \frac{A^2}{g f} : \frac{4 g . f^2}{B} . x^2\right),\ y^2 = \mathfrak{P} . x - \frac{\mathfrak{P}}{2 a} . x^2;$$

die Kurve AMm ist demnach eine Kurve des zweiten Grades oder ein Kegelschnitt, dessen Parameter $\mathfrak{P} = \frac{A^2}{g . f^2}$ und Axe $AB = 2 a = \frac{4 . g . f^2}{B}$, und zwar eine Ellipse, Hyperbel, oder Parabel, je nachdem $\frac{4 g . f^2}{B} = +$ oder $= -$, oder $= \infty$; dass aber $2 a = \frac{4 g . f^2}{B}$ wirklich $= AB$ sey, folgt hieraus:

$$AB = q + p = \frac{A^2}{n^3 - k^3} + \frac{A^2}{n^3 + k^3} = \frac{A^2 . n^3 + A^2 k^3 + A^2 n^3 - A^2 . k^3}{n^6 - k^6} =$$

$$\frac{2 A^2 . n^3}{n^6 - k^6} = [n^6 - A^2 . B = k^6,\ n^6 - k^6 = A^2 B,$$

$$B = \frac{n^6 - k^6}{A^2}] = 2 n^3 : \frac{(n^6 - k^6)}{A^2} = 2 n^3 : B = \frac{2 . n^3}{B} = \frac{2 . 2 g . f^2}{B} =$$

$\frac{4 . g . f^2}{B}$. Man bemerke, dass seit §. 30. beständig angenommen wurde $P = \frac{f^2}{r^2}$, welches Gesetz der beschleunigenden Kraft.

Ad S. 44. Z. 14. Diese Kreisbewegung wird bei dem Werthe $A^2 = 2 a g . f^2$ allerdings um den Centralkörper allemal erfolgen, doch nur dann, wenn die beschleunigende Kraft P der Centralkraft dem hier angenommenen Gesetze $P = \frac{f^2}{r^2}$ folgt, nicht bei irgend einem andern Gesetze $P = \frac{f^m}{r^m}$, wo dann zur Kreisbewegung, (welche wie in der Dynamik bewiesen, allemal möglich ist) das A^2 einen andern Werth haben muss. Herr Schubert begeht nemlich hier ein Sophisma, vor dem ich warnen muss.

Aus dem hier Gesagten erhellet, dass jede solche Centralkraft, wo das Gesetz der beschleunigenden Kraft besteht, $P = \frac{f^2}{r^2}$, und um welchen besagtermaassen eine Masse immer nur einen Kegelschnitt beschreibt, in einem Brennpunkte dieses Kegelschnittes liege, (welches daher auch in Bezug jeglicher Planeten- und Kometen-Bahn vom Konzentrirungspunkte der Centralkraft der Sonne gilt, da [§. 26. Astr.] bewiesen worden, dass deren beschleunigende Kraft diesem Gesetze unterliegt.)

Ad S. 44. Z. 23. Ist die um die Sonne beschriebene Bahn (Fig. 1.) AMmB eine Parabel vom Parameter e, so ist deren Gleichung $y^2 = e.x$, wenn die Abscissen x auf BA von B an nach A positiv genommen, und auf deren Endpunkten die senkrechten Ordinaten y aufgetragen werden. Ist diese Bahn eine Ellipse oder Hyperbel vom Parameter e, so ist deren Gleichung $y^2 = ex \mp \frac{e}{2a} x^2$, wenn auf AB von A nach B oder von B nach A die Abscissen x positiv gemessen werden, und auf deren Endpunkten die Ordinaten y $\perp$ stehen.

Ad S. 44. Z. 27. Denn $\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} =$

$$\frac{\sqrt{(k^6.\ r^4.\ d\varphi^2.\ \mathrm{Sin}^2\varphi + A^4.\ r^4.\ d\varphi^2)}}{A^2} =$$

$$\frac{r^2 d\varphi \sqrt{k^6\ \mathrm{Sin}^2\varphi + \frac{A^4}{r^2}}}{A^2} = [\mathrm{Sin}^2\varphi = 1 - \mathrm{Cos}^2\varphi \text{ und } A^2 = \ldots\ldots] =$$

$$\frac{r^2 d\varphi \sqrt{(k^6 - k^6.\ \mathrm{Cos}\ \varphi + \left(\frac{n^6 - 2n^3 k^3\ \mathrm{Cos}\ \varphi + k^6\ \mathrm{Cos}\ \varphi}{r^2}\right) r^2)}}{A^2} =$$

$$\frac{r^2 d\varphi \sqrt{(k^6 + n^6 - 2n^3 k^3\ \mathrm{Cos}\ \varphi)}}{A^2}.$$

Ad S. 45. Z. 9. Aus $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3\ \mathrm{Cos}\,\varphi}$ lässt sich leicht schliessen, dass (Fig. 1.) r von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90$ immerfort abnimmt, und von $\varphi = 90$ bis $\varphi = 180$ ebenfalls fortan abnimmt; also nähert sich der Planet, der um die Sonne C die Bahn AM in BA beschreibt, vom Aphelium A an bis zum Perihelium B in einem fort, und entfernt sich dann vom Perihelium an bis er wieder ins Aphelium kömmt,

immerfort. Aus der Arithmetik ist bekannt, dass $\frac{\alpha + \beta}{2}$ das arithmetische Mittel zwischen α und β ist; ist nemlich $\alpha = \alpha$, $\beta = \alpha + m$, so $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + \alpha + m}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{m}{2} = c$, also c um $\frac{m}{2} >$ als α und um $\frac{m}{2} < \beta$; ferner ist das arithmetische Mittel zwischen $\frac{\alpha}{A}$ und $\frac{\beta}{A} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}}{A}$; denn

$$\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}}{A} = \frac{\frac{\alpha+\alpha+m}{2}}{A} = \frac{\frac{2\alpha}{2} + \frac{m}{2}}{A} = \frac{\alpha}{A} + \frac{m}{2A} =$$

$\frac{\alpha}{A} + \frac{\frac{1}{2}m}{A}$, es ist also $\frac{\alpha}{A} + \frac{\frac{1}{2}m}{A} = \frac{c}{A}$ um $\frac{\frac{1}{2}m}{A} >$ als $\frac{\alpha}{A}$ und um $\frac{\frac{1}{2}m}{A} < \frac{\beta}{A}$, denn $\frac{c}{A} = \frac{\alpha}{A} + \frac{\frac{1}{2}m}{A} = \frac{\beta - m}{A} + \frac{\frac{1}{2}m}{A} = \frac{\beta}{A} - \frac{m}{A} + \frac{\frac{1}{2}m}{A} = \frac{\beta}{A} - \frac{\frac{1}{2}m}{A}$.

Hier ist nun das kleinste

$$v = \frac{\sqrt{n^6 + k^6 - 2n^3k^3 \operatorname{Cos} 0}}{A} = \frac{\sqrt{n^6 + k^6 - 2n^3k^3}}{A}$$ und das grösste

$$v = \frac{\sqrt{n^6 + k^6 - 2.n^3.k^3.\operatorname{Cos.} 180}}{A} = \frac{\sqrt{n^6 + k^6 + 2n^3k^3}}{A},$$ also das arithmethische Mittel dazwischen, nemlich die mittlere Geschwindigkeit:

$$v = \left(\frac{\sqrt{n^6 + k^6 - 2n^3k^3} + \sqrt{n^6 + k^6 + 2n^3.k^3}}{2}\right) : A,$$ ungefähr $= \frac{\sqrt{n^6 + k^6}}{A}$, wenn von solchen Bahnen (Fig. 1.) die Rede ist, deren Excentrizitäten sehr klein sind, (wie die bisher bekannten Planetenbahnen um die Sonne wirklich beschaffen sind); denn sey Kürze halber $n^6 + k^6 = M$, und $2n^3.k^3 = \alpha$, so ist obiges arithmetische Mittel =

$$\frac{(M - \alpha)^{\frac{1}{2}} + (M + \alpha)^{\frac{1}{2}}}{2A} =$$

$$\frac{\left\{\begin{matrix} M^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} M^{-\frac{1}{2}}\alpha + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} M^{-\frac{3}{2}}\alpha^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) M^{-\frac{5}{2}}\alpha^3 \ldots \\ M^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} M^{-\frac{1}{2}}\alpha + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} M^{-\frac{3}{2}}\alpha^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{2.3.} M^{-\frac{5}{2}}\alpha^3 + \ldots \end{matrix}\right\}}{2A.} =$$

$$\frac{2 M^{\frac{1}{2}} + 2 . \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} M^{-\frac{3}{2}}\alpha^2 + 2 . \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-3)}{2.3.4.} M^{-\frac{5}{2}}\alpha^4 + \ldots}{A}$$

oder approximative $= \frac{M^{\frac{1}{2}}}{A} = \sqrt{M} = \frac{\sqrt{n^6 + k^6}}{A}$, indem α ein kleiner Bruchtheil ist, dessen höhere Potenzen sehr klein sind; denn $\alpha = 2 n^3 . k^3 = 2 . 2g . f^2 \times \sqrt{4 . g^2 . f^4 - A^2 . B}$ ist sehr klein, wenn die Excentricität sehr klein ist, wenn nemlich die elliptische Bahnen sich dem Kreise nähert, denn ist sie völlig ein Kreis, so ist $\alpha = o$, da dann $A^2 B = 4 g^2 f^4$ (§. 34. Astr. S. 44.) Es erhält also r seinen mittlern Werth ungefähr, wenn es $= \frac{\sqrt{n^6 + k^6}}{A} = \sqrt{n^6 + k^6 - 2n^3 . k^3 . \text{Cos. } 90}$. $= \sqrt{n^6 + k^6 - 2n^3 . k^3 . \text{Cos } 270}$ wird, also sehr nahe, wenn $\varphi = 90°$ und $\varphi = 270°$ ist. Aus $v = \frac{\sqrt{n^6 + k^6 - 2 . n^3 . k^3 . \text{Cos } \varphi}}{A}$ folgt, dass wenn die Bahn ein Kreis ist, also $2n^3 . k^3 = o$ ist, dass dann $v = \frac{\sqrt{n^6 + k^6}}{A} = \frac{\sqrt{4g^2 . f^4 + 4g^2 f^4 - A^2 B}}{A}$, oder da dann $A^2 B = 4 g^2 . f^4$, dass dann: $v = \sqrt{\frac{4g^2 . f^4}{A^2}}$, also wenn des Kreises *radius* = a, folglich $A^2 = 2agf^2$, dass dann $v = \sqrt{\frac{4g^2 f^4}{2agf}} = \sqrt{\frac{2 . g . f^3}{a}}$, also eine beständige Grösse. [Dass alle Längen v, f, g, p, q, zur Längeneinheit den Erdhalbmesser haben, und als Zeiteinheit eine Sekunde angenommen, folgt seit (§. 27. Astr.)

Ad S. 45. Z. 19. Denn da (§. 31. Astr.) in Fig. 1. das Kurvenelement A auf AB senkrecht, so ist daselbst ds oder $Al = \sqrt{lk^2 + Ak^2} = \sqrt{lk^2 + lk^2 . \textit{tang}^2 (Alk)} = \sqrt{lk^2 (1 + t^2 . Alk)}$ aber Alk = unendlich klein

(Taf. II. Fig. 10.) also $Al = \sqrt{lk^2} = lk = [d\varphi : lk = 1 : k,\ lk = r.\ d\varphi] = rd\varphi$; im Aphelium und eben so im Perihelium, also $ds = rd\varphi$, oder da in diesen zwei Punkten $r = q$ und p, so daselbst $ds = qd\varphi$ und $ds = p.d\varphi$.

Ad S. 45. Z. 24. Hier ist so operirt: aus $p = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ folgt $p - a = - \sqrt{(a^2 - b^2)}$, $p^2 - 2ap + a^2 = a^2 - b^2$ also $b^2 = 2ap - p^2$, daher $a^2 - \frac{1}{2}ae.$ oder $a^2 - b^2 = a^2 - 2ap + p^2 = (a-p)^2$. Aus $\frac{2pp}{4p - e}$ = [da $e - \frac{c^2.\ p^2}{g.f^2} = \frac{c^2.\ p.p}{g.f^2} = c^2.p : \frac{gf^2}{p}$] $= \frac{2pp}{4p - c^2.\ p : \frac{gf^2}{p}} =$

$$\frac{2p.\ p.\ \frac{gf^2}{p}}{\frac{4p.\ gf^2}{p} - c^2 p} = \frac{2gf^2.\ p}{4gf^2 - c^2 p}.$$

Die von M um Centralkraft C beschriebene Bahn (Fig. 1.) AMmB ist, bei dem hier angenommenen Gesetze $P = \frac{f^2}{r^2}$ der beschleunigenden Kraft von C, eine Ellipse, Hyperbel, Parabel vom Parameter $e = \frac{c^2.\ p^2}{g.\ f^2}$ oder ein Kreis vom Parameter oder Durchmesser $e = \frac{c^2\ p^2}{gf^2}$, je nachdem $B = +, = -, = 0$, oder $= \frac{4g\ f^2}{e}$, also je nachdem $c <$ oder $>$ oder $= 2f\sqrt{\frac{g}{p}}$, oder endlich $B = \frac{4g.\ f^2}{e} = 4g\,f^2 : \frac{c^2.\ p^2}{g.\ f^2} = \frac{4gf^2.\ gf^2}{c^2\ p^2} = \frac{4g^2\ f^4}{c^2.\ p^2}$; es ist also AMmB ein Kreis vom *radius* $\frac{c^2\ p^2}{2g\ f^2}$, wenn $\frac{4gf^2 - c^2\ p}{p} = \frac{4g^2\ f^4}{c^2\ p^2}$; oder (wenn wir $c^2\ p = z$ setzen) wenn $4gf^2 - z = \frac{4g^2\ f^4}{z}$ oder $4gf^2.z - z^2 = 4g^2 f^4$ oder $z^2 - 4gf^2 z = - 4g^2 f^4$. oder $z = 2gf^2 \pm \sqrt{4g^2\ f^4 - 4g^2\ f^4} = 2gf^2$, oder wenn $c^2 p = 2gf^2$, oder $c^2 = \frac{2g\ f^2}{p}$ oder endlich wenn $c = f\sqrt{\frac{2g}{p}}$; da in diesem Falle $p = a$, so ist also in

diesem Falle $c = f \sqrt{\frac{2g}{a}} = \sqrt{\frac{2gf^2}{a}}$; es ist aber schon gezeigt worden, dass wenn AMmB ein Kreis, dann $r = \sqrt{\frac{2gf^2}{a}}$, welches in allen Punkten von AMmB also auch im Perihelium B in der Entfernung $p = a$ von C; dass die Centralkraft C im Mittelpunkte des Kreises AMmB liege, versteht sich daraus, dass die Centralkraft in einem Brennpunkte dieser Ellipse (von der Excentricität = o) liegt, beim Kreise aber beide Brennpunkte im Mittelpunkte liegen.

Ad S. S. 46. Z. 27. Das ist so zu verstehen: Die Bahn, die ein Planet oder Komet um die Centralkraft oer Sonne (wobei [§. 26. Astr.] $P = \frac{f^2}{r^2}$ beschreibt, ist (§. 34. Astr.) eine Ellipse, Hyperbel, Parabel, von der Gleichung $y^2 = ex - \frac{a}{2a} \cdot x^2$ [$y \perp x$, und x (Fig. 1.) von B nach A auf AB gemessen] oder da (§. 36. Astr.) $e = \frac{c^2 . p^2}{g f^2}$, $a = \frac{2gf^2 p}{4gf^2 - c^2 p}$, von der Gleichung $y^2 = \frac{c^2 . p^2}{g . f^2} \cdot x - \frac{c^2 . p (4gf^2 - c^2 p)}{4 \cdot g^2 . f^4} \cdot x^2$. (Hier wird angenommen, dass das Perihelium dieser 3erlei Bahnen in einerlei Punkt B liege, da man sich vorstellt, es geschehe jedesmal in B ein auf aB $\perp$ Wurf, dessen jedesmalige Grösse in Bezug $p = CB$ so gross ist, dass einmal die Bahn eine Ellipse, einmal eine Hyperbel, einmal eine Parabel wird,) sie ist Ellipse, Parabel, oder Hyperbel deren Scheitel in einerlei Punkt B liegen, je nachdem der Koeffizient von $x^2 = +$ oder = o oder = —; es nähert sich also die elliptische Bahn der parabolischen, um so mehr (bei beiden Bahnen für c und p einerlei Werth angenommen), d. h. für einen bestimmten Werth von x nähert sich dessen y der elliptischen Bahn, um so mehr dem Y desselben Werthes von x, der parabolischen Bahn, je kleiner der Koeffizient von x^2 ist [denn in der parabolischen Bahn vom Parameter $\frac{c^2 . p^2}{g f^2}$ ist $Y^2 = \frac{c^2 . p^2}{g . f^2} . x$, und in der elliptischen Bahn von demselben Parameter $\frac{c^2 p^2}{g f^2}$ ist $y^2 = \frac{c^2 . p^2}{g . f^2} . x - \frac{c^2 . p (4gf^2 - c^2 p)}{4 \cdot g^2 . f^4} x^2$], so lange er positiv bleibt, welches durch das Abnehmen von $c^2 p$ geschieht. Es kann aber $c^2 p$ wie immer abnehmen, ohne dass hiedurch die elliptische Bahn vom Parameter

$\frac{c^2\,p^2}{g.\,f^2}$ zu einer parabolischen Bahn von demselben Parameter würde; denn da bei der elliptischen Bahn $c^2 p < 4 g f^2$ ist, so kann $c^2 p$ ins Unendliche abnehmen, ohne jemals den Koeffizienten von x^2 zu Null zu machen, welcher einzige Fall die elliptische Bahn vom Parameter $\frac{c^2\,p^2}{g\,f^2}$ zur parabolischen Bahn von demselben Parameter machen kann, es tritt aber dieser Fall blos dann ein, wenn $c^2 p = 4 g f^2$, welches nicht durch das Abnehmen von $c^2 p$, das ohnehin schon kleiner als $4 g f^2$ ist, geschehen kann. In diesem Sinne wird hier mit ziemlicher Analogie die parabolische Bahn vom Parameter $\frac{c^2.\,p^2}{g.\,f^2}$ eine Asymptote der elliptischen Bahn vom Parameter $\frac{c^2\,p^2}{g.\,f^2}$ genannt. Dass bei einem angenommenen c und p also auch $\frac{c^2\,p^2}{g.\,f^2}$ die elliptische Bahn (beide vom Parameter $\frac{c^2.\,p^2}{g.\,f^2}$, und entsprechend dem Perihelium p und der Wurfsgeschwindigkeit c daselbst $\perp$ auf Absidenlinie AB) um so näher komme, je näher man diese zwei Kurven am Perihelium B betrachtet, folgt daraus; es ist in diesem Falle bei der elliptischen Bahn $y^2 = ex - \frac{e}{2a} x^2$ und bei der parabolischen Bahn $Y^2 = e.\,x$, wo e sowohl als a in beiden Kurven einerlei Werth haben. Es ist also hier für jedes x allemal $Y^2 - y^2 = \frac{e}{2a}.\,x^2$, welche Differenz um so kleiner ist, je kleiner x, also je näher an B die Ordinaten Y und y, also die Parabel und Ellipse betrachtet werden. Wäre die Bahn eine Hyperbel von demselben Parameter e, so wäre deren Gleichung (für dasselbe Koordinatensystem) $y'^2 = ex + \frac{e}{2a}.\,x^2$, fiele also auch mit der parabolischen Bahn, deren Scheitel B und Parameter e wären, um so mehr zusammen, je kleiner x, also je näher an B man diese beiden betrachten möchte. Es könnte aber hier nicht gesagt werden, dass die parabolische Bahn vom Parameter $\frac{c^2.\,p^2}{g.\,f^2}$ eine Asymptote der hyperbolischen Bahn von demselben Parameter $\frac{c^2.\,p^2}{g.\,f^2}$ sey; denn es ist bei der hyperbolischen Bahn $y'^2 = \frac{c^2.\,p^2}{g.\,f^2}\,x - \frac{c^2.\,p\,(4.\,g.\,f^2 - c^2.\,p)}{4.\,g^2.\,f^4}\,x^2$, und bei der parabolischen Bahn $Y^2 =$

$\frac{c^2. p^2}{g. f^2} \cdot x$. Da nun hier $\frac{c^2. p (4g. f^2 - c^2. p)}{4g^2. f^4}$ negativ ist, so ist $c^2. p > 4g. f^2$; nun wird $\frac{c^2. p (4g. f^2 - c^2. p)}{4g^2. f^2}$ immer kleiner je kleiner $c^2. p$ wird, also kommen für einerlei x dessen Y und y einander immer näher und näher, oder die hyperbolische Bahn von Parameter $\frac{c^2. p^2}{g. f^2}$ kömmt der parabolischen Bahn vom Parameter $\frac{c^2. p^2}{g. f^2}$ immer näher, je kleiner $c^2. p$ wird; nimmt nun $c^2. p$ immer fort ab, so fällt endlich die hyperbolische Bahn vom Parameter $\frac{c^2. p^2}{g. f^2}$ ganz in die parabolische Bahn vom Parameter $\frac{c^2. p^2}{g. f^2}$, wenn nemlich $c^2. p = 4g. f^2$ wird, (denn dann ist

$$y'^2 = \frac{c^2. p^2}{g. f^2} x - o. x^2 = \frac{c^2. p^2}{g. f^2} x.).$$

Es fällt also besagte hyperbolische Bahn ganz in besagte parabolische Bahn nach endlichem Abnehmen von $c^2. p$, durch dessen Abnehmen jene dieser immer näher kömmt, welches dem Begriffe einer Asymptote widerspricht.

Ad S. 47. Z. 20. Man bemerke, dass (§. 27. Astr.) hier alle Längen in Erdhalbmessern und Zeiten in Sekunden angegeben sind; ferner was (§. 27. a) über das Maass einer absoluten Centralkraft gesagt worden, $= \frac{ff}{\varrho\varrho} = ff$ für $\varrho = 1$. Hier folgt

$$e : e' = \frac{c^2. p^2}{g. f^2} : \frac{c'^2. p'^2}{g. f'^2} = \frac{c^2. p^2}{f^2} : \frac{c'^2. p'^2}{f'^2},$$ also für

$f = f'$, $e : e' = c^2. p^2 : c'^2. p'^2$; ferner

$$e : e' = \frac{4. h. p^2}{f^2} : \frac{4\ h'. p'^2}{f'^2} = \frac{h. p^2}{f^2} : \frac{h'. p'^2}{f'^2} = \left(h = \frac{c^2}{4g}\right) =$$

$$\frac{c^2. p^2}{4g. f^2} : \frac{c'^2. p'^2}{4g. f'^2} = \frac{c^2. p^2}{f^2} : \frac{c'^2. p'^2}{f'^2},$$ also für

$c = c'$, $p = p'$, $e : e' = \frac{1}{f^2} : \frac{1}{f'^2} = f'^2 : f^2 = \mathfrak{A}' : \mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$ die dem f' und f entsprechenden absoluten Centralkräfte sind, (§. 27. Astr.) wenn nemlich die beschleunigende Kraft der Einheit der Masse = 1 = jener die auf der Erdoberfläche durch die Anziehungskraft der Erde bewirkt wird, bei der Centralkraft $\mathfrak{A}$ in der Entfernung f; bei der Centralkraft $\mathfrak{A}'$ hingegen in der Entfernung f' Statt findet;

$e : e' = \frac{c^2 . p^2}{2} : \frac{c'^2 . p'^2}{f'^2} = c^2 . p^2 . f'^2 : c'^2 . p'^2 . f^2 = c^2 . p^2 . \mathfrak{A}' : c'^2 . p'^2 . \mathfrak{A}$ folgt für $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ und $p = p'$, $e : e' = c^2 : c'^2$ oder $c : c' = \sqrt{e} : \sqrt{e'}$. In Parabel $e = 4p$, also folgt aus $e = \frac{c^2 . p^2}{g . f^2}$ für die Parabel $4p = \frac{c^2 . p^2}{g . f^2}$, $4 = \frac{c^2 . p}{g . f^2}$, $p = \frac{4g . f^2}{c^2} = \frac{4g . f^2}{4g . h} = \frac{f^2}{h}$, also bei der Parabel $e : e' = p : p' = \frac{f^2}{h} : \frac{f'^2}{h'} = \frac{\mathfrak{A}}{h} : \frac{\mathfrak{A}'}{h'}$, ist also $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, und es beschreiben zwei Massen um diese zwei Centralkräfte Parabeln, so ist dabei $e : e' = p : p' = h' : h = \frac{c^2}{4g} : \frac{c'^2}{4g} = c^2 : c'^2$.

Ad S. 47. Z. 32. Man bemerke, dass man unter Sonnennähe und Sonnenferne, Perihelium und Aphelium, nicht nur bei den Bahnen um die Centralkraft der Sonne, sondern überhaupt jeder Centralkraft, um welche eine Bahn beschrieben wird, den kleinsten und grössten *radius vector* versteht.

Ad S. 48. Z. 11. Es ist nemlich $\gamma' = \sqrt{a^2 - b^2}$, wenn γ', a, b', die Zahlen sind, welche anzeigen, wie oft die angenommene Längeneinheit in den Längen γ', a, b' enthalten sey, (a, b', γ', grosse, kleine halbe Axe, Excentricität,) wird aber als Einheit der Länge die Länge a angenommen, so werden die Zahlen γ, b, 1 dieselben Längen ausdrücken, als die Zahlen γ' und b', und a ausdrückten, wenn (als Zahlen betrachtet) $\gamma = \frac{\gamma'}{a}$, denn $\gamma' : \gamma = a : 1$, wird eine Länge von 10 Zollen statt in Zollen in Längen von 2 Zollen ausgedrückt, so drückt im zweiten Falle die Zahl 5 dieselbe Länge aus, aber 10 : 5 = 2 : 1. Eben so $b = \frac{b'}{a}$, $1 = \frac{a}{a}$; werden also alle Längen in halben grossen Axen ausgedrückt, oder wird die halbe grosse Axe als Einheit der Länge ausgedrückt, so ist $\gamma = \sqrt{1 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{b'^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b'^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b'^2}}{a}$; was ich hier unter den Zahlen γ, a, b' verstehe, versteht Herr Schubert unter den Zahlen γ, a, b, wenn gleich γ jene Zahl, welche anzeigt, wie oft die als Einheit angenommene Länge a in der Excentricität der betrachteten elliptischen Bahn enthalten sey, so ist doch im Verfolg aller hier angestellten Betrachtungen die angenommene Einheit der Länge der Erdhalbmesser (wie seit §. 27. Astr.), da die Zahlen a, b, ... in Rechnung bleiben, welche sich auf die Längeneinheit Erdhalbmesser beziehen.

(Ich spreche hier von der Zahl b in Schubert, nicht wie ich es vorhin nannte.) γ wird hier als blosse Zahl behandelt, ohne gerade eine Länge darunter zu verstehen; es ist nemlich γ nichts anders, als jene Zahl, welche so viel Einheiten in sich enthält, als die halbe grosse Axe in der Excentricität bey jener Ellipse enthalten ist, von welcher jedesmal die Rede ist.

Ad S. 48. Z. 11. Alle Entfernungen r, p, q beziehen sich auf jenen Punkt in der Masse der Sonne, in welchem sich die Centralkraft der Sonne wie im Schwerpunkte aller Elementarattraktionen konzentrirt.

Ad S. 48. Z. 23. Wenn ein Planet um den Konzentrirungspunkt der Sonnencentralkraft in der Zeit T Sekunden gelaufen, d. h. wenn der Erdpunkt den von diesem Konzentrirungspunkte aus gemessenen Abschnitt $= 1$ des *radius vectors* den rektifizirten Bogen *pro radio* $1 = 2\pi$ durchlaufen hat, und dieses mit ungleichen Winkelgeschwindigkeiten geschieht, so dass er z. B. in der ersten Sekunde den rektifizirten Bogen *pro radio* $1 = h$, in der zweyten jenen $= b$, in der dritten jenen $= c$, in beschreibt, so heisst mittlere Geschwindigkeit jene Winkelgeschwindigkeit, mit welcher besagte T Sekunden 2π gleichförmig beschreiben würde, nemlich in jeder Sekunde ein rektifizirter Bogen *pro radio* $1 = m = \frac{2\pi}{T}$, also ist dann m der in jeder Sekunde beschriebene Bogen oder die Geschwindigkeit des mit einer mittleren Geschwindigkeit umlaufenden Planeten, oder m seine mittlere Geschwindigkeit selbst. Es ist dieser Begriff ja nicht mit jenem der mittlern Geschwindigkeit (§. 35. Astr.) zu verwechseln, da dort vom Mittel zwischen der grössten und kleinsten Endesgeschwindigkeit die Rede ist.

Ad S. 48. Z. 27. Aus $T^2 : \tau^2 = a^3 : \alpha^3$ ist auch $T^2 : \tau^2 = 8a^3 : 8\alpha^3$, oder $T^2 : \tau^2 = (2a)^3 : (2\alpha)^3$.

Ad S. 48. Z. 30. Hier sind a und α die grossen $\frac{\text{Axen}}{2}$ jener Ellipsen, welche die Körper um die Centralkräfte P, Q in den Zeiten T, τ, durchlaufen.

Ad S. 49. Z. 21. Hier ist φ durchaus die wahre Anomalie des Planeten in dem Augenblicke als er die Tangential-Endesgeschwindigkeit v hat; v und φ zusammengehörige Funktionen; es ist nemlich φ der rektifizirte Bogen *pro radio* $= 1$, welcher den Winkel misst, den der *radius vector* r im Augenblicke der Endesgeschwindigkeit v bildet, und zwar mit der Absidenlinie, die nemlich durch (Fig. 1.) Aphelium und Perihelium A und B geht, wobei zu merken, dass im Aphelium $\varphi = 0$ (§. 35.)

Ad S. 49. Z. 26. Man erhält nemlich durch wirkliche Division des Gliedes

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2.\ \sin^2\varphi}{1-\gamma.\ \cos\varphi}\right) = \tfrac{1}{2}\gamma^2.\ \sin^2\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma^3.\ \sin^2\varphi.\ \cos\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma^4.\ \sin^2\varphi.\ \cos^2\varphi +$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma^5.\ \sin^2\varphi.\ \cos^3\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma^6.\ \sin^2\varphi.\ \cos^4\varphi + \ldots\ldots$$ des Gliedes

$$-\tfrac{1}{8}\left(\frac{\gamma^4.\ \sin^4\varphi}{1-3.\ \gamma.\ \cos\varphi + 3.\ \gamma^2.\ \cos^2\varphi - \gamma^3.\ \cos^3\varphi}\right) = -\tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin^4\varphi -$$

$$\tfrac{3}{8}\gamma^5.\ \sin^4\varphi.\ \cos\varphi + \left(\frac{3+3.\ 3}{8}\right)\gamma^6.\ \sin^4\varphi.\ \cos^2\varphi.\ \ldots\ldots$$ u. s. w., ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\gamma^4.\ \sin^2\varphi.\ \cos^2\varphi - \tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin^4\varphi = 4.\ \tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin^2\varphi.\ \cos^2\varphi - \tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin^2\varphi.\ \sin^2\varphi. =$$
$$\tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin\varphi\ (4\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin^2\varphi\ (4\ (1-\sin^2\varphi) - \sin^2\varphi) =$$
$$(4 - 4\sin^2\varphi - \sin^2\varphi = 4 - 5\sin^2\varphi) = \tfrac{1}{8}\gamma^4.\ \sin^2\varphi.\ (4 - 5\sin^2\varphi),$$ u. s. w.

Obige Seite und Zeile. Es folgt aus:

$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2},\ \sin^2\varphi.\ \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos\varphi.\ \cos 2\varphi = \Big(\text{da } \cos(a+b) +$$

$$\cos(a-b) = \cos a.\ \cos b - \sin a.\ \sin b + (\cos a.\ \cos b + \sin a.\ \sin b) = 2\cos a.\ \cos b,$$

oder $\cos a.\ \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$, also

$$\cos\varphi.\ \cos 2\varphi = \frac{\cos(2\varphi+\varphi) + \cos(2\varphi-\varphi)}{2} = \frac{\cos 3\varphi + \cos\varphi}{2}\Big) =$$

$$\tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos 3\varphi + \cos\varphi}{2}\right) = \tfrac{2}{4}\cos\varphi - \frac{\cos 3\varphi}{4} - \frac{\cos\varphi}{4} = \tfrac{1}{4}\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi.$$

ferner $\sin^4\varphi = \dfrac{\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3}{8} = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 4\varphi;\ \ldots\ldots$

Ad S. 49. Z. 34. Hier ist durchaus angenommen, dass die Planetenbahn eine Ellipse sey. $v = ma\ (1 + \tfrac{3}{4}\gamma^2 + \frac{33}{64}\gamma^4 - \ldots\ldots)$ ist der Raum der in jeder folgenden Zeiteinheit vom Planeten nach der Tangente (Fig. 1.) von M durchlaufen würde, wenn in M alle Wirksamkeit von Kraft aufhören möchte, und der Planet demnach blos seiner Trägheit überlassen bliebe, γ ist eine blosse Zahl (§. 38.), φ rektifizirter Bogen *pro radio* = 1 messend den Winkel der wahren Anomalie ACM, also in derselben Längeneinheit gemessen, als m, a, v; die angenommene Zeiteinheit ist hier willkürlich (§. 27. Astr.), aber die Längeneinheit ist nothwendig der Erdhalbmesser, v, a, m, φ, sind also in Erdhalbmessern ausgedrückte Längen. Die Gleichung $v = m.\ a\ (1 + \ldots)$

bleibt auch noch so wahr $\frac{v}{a} = m\,(1 + \ldots)$, oder wenn $\frac{v}{a} = v'$ gesetzt wird, $v' = m\,(1 + \ldots)$. In diesem Falle bedeutet aber v' als Zahl betrachtet nicht dasselbe als v, sondern nur der $\frac{1}{a}$ von v, also ist bey $v' = m\,(1 + \ldots)$ angenommene Einheit der Länge, die Länge a Erdhalbmesser, wo aber m immer noch die Länge v = der Länge m multiplizirt mit der Länge a, alles in Erdhalbmessern ausgedrückt, so heisst diess so viel: Die Zahl, wie oft der Erdhalbmesser in der Länge v enthalten ist, ist gleich der Zahl, wie oft der Erdhalbmesser in der Länge v enthalten ist, multiplizirt mit der Zahl, wie oft der Erdhalbmesser in der Länge a enthalten ist; da aber $\frac{v}{a} = m.\ \frac{a}{a}$ oder $v' = m$, so ist der $\frac{1}{a}$ Theil der Zahl, wie oft der Erdhalbmesser in der Länge v enthalten ist, oder die Zahl v', wie oft die Länge a Erdhalbmesser in der Länge v enthalten ist, = der Zahl, wie oft der Erdhalbmesser in der Länge m enthalten ist; drücke ich also den Bogen m in Erdhalbmessern aus, so ist $m\,(1 + \ldots)$ die Zahl, welche so viel Einheiten enthält, als die Länge a Erdhalbmesser in der Länge v enthalten ist, welche Zahl ich kurz durch v' andeute; m in Erdhalbmesser ausgedrückt ist $= \frac{2\pi}{T} = \frac{2.\ 3,\ 14}{T} = \frac{6,\ 28}{T}$, und zwar auf eine Sekunde, Minute, Stunde, ... bemessen, je nachdem T die Umlaufszeit eines Planeten in seiner elliptischen Bahn in Sekunden oder Minuten, oder Stunden ausdrückt; ist m, $\frac{2\pi}{T}$ in Sekunden, so wird diese Länge auf eine Stunde bemessen, wenn T sich auf Sekunden bezieht, und man $\frac{2\pi}{T}$ mit 60 $\times$ 60 multiplizirt, welches gilt $\frac{7200.\ \pi}{T}$. Hieraus wird begreiflich, wie das am Ende dieses Paragraphs Gesagte zu verstehen sey.

Ad S. 50. Z. 12. n und m Längen in Erdhalbmessern ausgedrückt; m die Länge des rektifizirten Bogens *pro radio* = 1, welcher vom *radius vector* (in jeder Zeiteinheit durchlaufen würde, wenn der Planet um die Sonne so liefe, dass sein *radius vector* in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschriebe; w die Länge welche der Endpunkt R (§. 21. Astr.), der von C aus abgeschnittenen Längeneinheit CR des *radius vector* CM = r:, in jeder folgenden Zeiteinheit nach der Tangente des Kreises RI vom Punkt I an durchlaufen möchte, wenn der Punkt R für sich frei fortlaufen könnte, oder auch w dieselbe Länge in einen Kreisbogen vom Radius RC gebogen, welcher Bogen von R in

jeder folgenden Zeiteinheit durchlaufen würde, wenn R mit seiner Tangentialgeschwindigkeit w ohne an Geschwindigkeit zu- oder abzunehmen von I an im Kreise von Radius CR zu laufen gezwungen wäre; da ist denn nun $w = m(1 + \ldots)$, oder da, wenn m und w, M und W Grade enthalten, $m : w = M : W$, oder $\frac{M}{m} = \frac{W}{w}$, so ist auch $w \cdot \frac{M}{m} = m \cdot \frac{W}{w}(1 + \ldots)$ aber $w \cdot \frac{M}{m} = W$, und $\frac{mW}{w} = M$ also $W = M(1 + \ldots)$ wo dieselben Bogen, die vorhin in Längen durch w und m ausgedrückt waren, nun nach ihren Graden W und M gemessen sind. Ist die Zeiteinheit eine Stunde, so sind die Bogen w und m auf eine Stunde bemessen; ist nun eine Stunde in Vergleich der ganzen Umlaufszeit sehr klein, so kann angenommen werden, dass bei eintretender Anomalie φ in der kommenden Stunde von R einen Bogen durchlaufen werde, der von w nicht sehr verschieden ist, als ob R blos seiner Trägheit gemäss den Bogen w wirklich beschriebe; denn ein Bogen w'' den R wirklich beschreibt in einer gegebenen Zeit, ist von Bogen w' den er in dieser Zeit von I an blos durch Trägheit beschreibt, um so weniger verschieden, je kürzer die Zeit ist. Es kann demnach $w = m(1 + 2\gamma^2 + \ldots)$ approximative, nicht streng mathematisch als der in der (vom Endpunkte an der beschriebenen wahren Anomalie φ) folgenden Stunde von R wirklich durchlaufene Bogen angenommen werden, woraus erhellet, was Herr Schubert hier unter wahrer stündlicher Bewegung des Planeten versteht.

Ad S. 51. Z. 13. Dass sich die Attraktion der Sonne ins Unendliche verbreite, ist nur wahrscheinlich, aber keineswegs bewiesen; denn alles im Vorhergehenden bleibt wahr, wenn das Gesetz der beschleunigenden Kraft der Sonnen-Centralkraft (§. 30. Astr.) durch $P = \frac{f^2}{r^2} - \alpha$ ausgedrückt werden könnte, vorausgesetzt, dass α eine so kleine endliche Grösse sey, dass sie gegen $\frac{f^2}{r^2}$ verschwinde, so lange r nicht grösser wird, als wir in den verschiedenen Planetenbahnen das r beobachten könnten. Bei weit grössern Werthen von r könnte aber α nicht mehr als verschwindend angesehen werden, und bey $r = \frac{f^2}{r^2}$ würde sogar $P = 0$, also erstreckte sich die Wirksamkeit der Sonnencentralkraft nur bis auf die Entfernung $r = \frac{f}{\sqrt{\alpha}}$, welche nur dann unendlich, wenn $\alpha = 0$, also bewiesen wäre, dass $P = \frac{f^2}{r^2}$, und nicht seyn könne $P = \frac{f^2}{r^2} - \alpha$.

Ad S. 56. Z. 30. Die Beschleunigung G einer Kraft = P ist G = g P (§. 16. Astr.), aber hier ist $g.P = \frac{A^2.}{2b^2.}\frac{a}{r^2}$, wo P die beschleunigende Kraft einer Centralkraft in der Entfernung r, also g.P die Beschleunigung r, wobey angenommen, dass der Körper um die Centralkraft eine Ellipse von grosser und kleiner Axe a, b beschreibt.

Ad S. 60. Z. 2. von unten. Schwere heisst hier immer die auf einen schweren Körper sich äussernde Centralkraft der Erde, so nahe an der Oberfläche der Erde, dass die grössere oder kleinere Entfernung davon auf diese Kraftäusserung nur unmerklichen Einfluss hat. Genau genommen bezieht sich das hier Gesagte von der Schwere auf die Schwere oder Schwerkraft in einerlei Standpunkte der Erdoberfläche; denn anders ist die Schwerkraft unterm Aequator, anders unter den Polen, wegen der verschiedenen Schwerkraft bei täglicher Rotation, wie die verschiedenen Längen der isochronen Pendel beweisen.

Ad S. 61. Z. 20. C, c. die Geschwindigkeiten, die in einerlei Zeit den Massen M, m durch die bewegenden Kräfte, nemlich ihre Totalgewichte ertheilt werden müssen unter beiderseits gleichen Umständen.

Ad S. 63. Z. 8. Das hier Gesagte ist nicht mit strenger Richtigkeit ausgedrückt. Hier ist eigentlich nur so viel wahr. Nennen wir $\overset{\odot}{\mathfrak{M}}$ die Masse der Sonne, $\overset{\oplus}{\mathfrak{M}}$ die Masse der Erde, S die absolute Centralkraft der Sonne, M die absolute Centralkraft der Erde, so ist $S : M = \overset{\odot}{\mathfrak{M}} : \overset{\oplus}{\mathfrak{M}}$, also $S = \frac{M.\overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{\overset{\oplus}{\mathfrak{M}}}$, und nur dann wenn M = 1, und $\overset{\oplus}{\mathfrak{M}} = 1$ angenommen wird, ist $S = \overset{\odot}{\mathfrak{M}}$; also nur dann ist die Zahl S, welche die absolute Centralkraft der Sonne ausdrückt, dieselbe Zahl als jene $\overset{\odot}{\mathfrak{M}}$, welche die Masse der Sonne ausdrückt, wenn als Einheit der Massen die Masse der Erde, und als Einheit der absoluten Centralkräfte die absolute Centralkraft der Erde angenommen wird. Nennen wir $\mathfrak{B}'$ die beschleunigende Kraft, welche die Centralkraft der Sonne in der Entfernung r ausübt, und $\mathfrak{B}$ jene, welche sie in der Entfernung = 1 ausübt, so ist $\mathfrak{B} : \mathfrak{B}' = r^2 : 1$, also $\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{B}}{r^2}$; drückt also S die absolute Centralkraft der Sonne aus, und es soll $\frac{S}{r^2}$ die

beschleunigende Kraft der Sonnencentralkraft in Entfernung r ausdrücken, so ist $\frac{\mathfrak{B}}{m} = \frac{S}{r^2}$ also $S = \mathfrak{B}$. Herr Schubert versteht also unter absoluter Centralkraft S der Sonne die beschleunigende Kraft, welche die Sonne auf einen Körper in Entfernung = 1 ausübt. Dann ist aber $S : M = \overset{\odot}{\mathfrak{M}} : \overset{♁}{\mathfrak{M}}$ auch nur wahr, wenn M die beschleunigende Kraft ist, die die Centralkraft der Erde ausübt in der Entfernung = 1. Es drücken also S und M die beschleunigenden Kräfte der Sonnen- und Erdencentralkraft in der Entfernung = 1; und $S = \frac{M. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{\overset{♁}{\mathfrak{M}}}$. Die bewegende Kraft womit die Erde in der Entfernung von der Sonnencentralkraft durch die Sonnencentralkraft gegen die Sonne auf einen fixen Punkt drücken möchte, ist

$= \frac{S}{r^2}. \overset{♁}{\mathfrak{M}} = \frac{M. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{r^2. \overset{♁}{\mathfrak{M}}}. \overset{♁}{\mathfrak{M}} = \frac{M. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{r^2}$. Nennen wir m und $\overset{+}{\mathfrak{M}}$ die Masse und absolute Centralkraft eines andern Planeten (wieder in demselben Sinne als bei Sonne und Erde) so $m : M = \overset{+}{\mathfrak{M}} : \overset{♁}{\mathfrak{M}}$, und also $m = \frac{M. \overset{+}{\mathfrak{M}}}{\overset{♁}{\mathfrak{M}}}$, dessen beschleunigende Kraft in Entfernung $r = \frac{m}{r^2} = \frac{M. \overset{+}{\mathfrak{M}}}{r^2 \overset{♁}{\mathfrak{M}}}$, und die bewegende Kraft womit die Masse $\overset{\odot}{\mathfrak{M}}$ der Sonne gegen den Planeten, durch die Centralkraft des Planeten gedrückt wird,

$= \frac{m. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{r^2} = \frac{M. \overset{+}{\mathfrak{M}}}{r^2. \overset{♁}{\mathfrak{M}}}. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}$, durch die Centralkraft der Sonne drückt aber die Masse $\overset{+}{\mathfrak{M}}$ des Planeten in Entfernung r gegen Sonne, mit bewegender Kraft

$\frac{S}{r^2}. \overset{+}{\mathfrak{M}} = \frac{M. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{\overset{♁}{\mathfrak{M}}. r^2}. \overset{+}{\mathfrak{M}} = \frac{M. \overset{+}{\mathfrak{M}}. \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{r^2. \overset{♁}{\mathfrak{M}}}$; also drückt der Planet so stark gegen die Sonne, als die Sonne gegen den Planeten. Nemlich Wirksamkeit und Gegenwirksamkeit gleich gross.

Ad S. 66. Z. 10. Die beschleunigende Kraft v von P ist hier $= \frac{\mu. S. \mathfrak{d}}{r^2}$; sey γ das Gewicht (auf Erdoberfläche gewogen) der Einheit der Masse, so ist das Gewicht

von S. $\mathfrak{d} = \gamma$. S. $\mathfrak{d}$, also wäre die beschleunigende Kraft v' von R erzeugt durch die in C konzentrirte Masse der Kugeloberfläche (CP $=$ r) $= \frac{\lambda. \gamma. S. \mathfrak{d}}{r^2}$ [λ ein beständiger Koeffizient], μ kann allemal durch das Produkt aus γ in einen beständigen Koeffizienten β ausgedrückt werden, sey also $\mu = \beta. \gamma$. Nun war die beschleunigende Kraft v von P erzeugt durch Mm. $\mathfrak{d} = \frac{\mu. Mm. \mathfrak{d}}{P. M^2} = \frac{\beta. \gamma. Mm. \mathfrak{d}}{P. M^2}$, es ist aber (Astr. §. 50.) $V' : v = \frac{\gamma. S. \mathfrak{d}}{r^2} : \gamma. \frac{Mm. \mathfrak{d}}{P. M^2}$, also ist $V' = \frac{v. \gamma. S. \mathfrak{d}. P. M^2}{r^2. \gamma. Mm. \mathfrak{d}} = \frac{S. P. M^2. v}{r^2. Mm} = \frac{S. P. M^2}{r^2. Mm}. \mu. \frac{Mm. \mathfrak{d}}{P. M^2}$, oder $\frac{\lambda. \gamma. S. \mathfrak{d}}{r^2} = \frac{\mu. S. \mathfrak{d}}{r^2}$, daher $\lambda\gamma = \mu$, und also ist $V' = \frac{\mu. S. \mathfrak{d}}{r^2}$, oder $V' = v$.

Ad S. 66. Z. 22. Das ist so zu verstehen: Es bleibt der Druck des Punktes O nach OC (Taf. IV. Fig. 5.) derselbe, wenn die ganze anziehende Masse auf der Kugeloberfläche AD im Mittelpunkte C konzentrirt wird; denn jedes Element p der Kugeloberfläche P erleidet hierdurch keine Veränderung seiner Anziehung nach pC, und das Streben aller Elemente von P nach C kann nur ein gesammtes Streben für O nach OC bewirken. Die in C konzentrirte Masse der Kugeloberfläche AD wird nach CO eben so stark gedrückt, ob die Masse der Kugeloberfläche P gleichförmig an dieser Kugeloberfläche vertheilt oder ob sie in O konzentrirt liegt. Es ist demnach der Druck, womit O nach OC, und jener, womit C nach CO bestimmt werden (welche Drucke wegen gleicher Wirkung und Gegenwirkung gleich gross sind), derselbe, ob die Masse von P und jene von AD an den Kugeloberflächen P und AD gleichförmig vertheilt, oder ob sie in O und C konzentrirt sind. Dieser Druck D in O nach OC ist die bewegende Kraft, welche die Masse $\mathfrak{p}$ an der Kugeloberfläche P nach OC beschleunigt; also ist für die Bewegung der Kugeloberfläche P nach OC die beschleunigende Kraft $= \frac{D}{\mathfrak{p}}$; eben so ist die beschleunigende Kraft für die Kugeloberfläche AD nach CO $= \frac{D}{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{a}$ die Masse der Kugeloberfläche AD ist. Also ist der Fall, wo die Massen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$ an den Kugeloberflächen P und AD gleichförmig vertheilt sind, und die Kugelcentra um OC von einander abstehen, für die Bewegung der Punkte O und C gegen einander (binnen jenen dt, wo alles als beständig angesehen werden darf) mit jenem

Falle gleichgeltend, wo O und C von einander um OC abstehen, und die Masse $\wp$ und α in O und C konzentrirt liegen. In diesem Sinne ist auch alles hieraus Gefolgerte zu verstehen.

Ad S. 66. Z. 33. Attraktion heisst hier beschleunigende Kraft von P, wir nennen sie V, in so ferne sie durch Kugelschichte zwischen AB und DE bewirkt wird, daher dV, in so ferne sie durch Kugelschichte S unter übrigens gleichen Umständen bewirkt wird.

Ad S. 67. Z. 19. Es folgt nemlich aus den ersten Worten (Astr. §. 50.) wenn wir die beschleunigende Kraft der Kugel $S = B$ und jene der Kugel $\Sigma = b$ nennen, $B : b = \gamma\Sigma : \gamma S$, also $B = \frac{b \cdot \gamma \cdot \Sigma}{\gamma S} = \frac{b\Sigma}{S} = \frac{b}{S} \cdot \Sigma$ und $b = \frac{B \cdot \gamma \cdot S}{\gamma \Sigma} = \frac{B}{\Sigma} \cdot S$, aber aus $B : b = \gamma\Sigma : \gamma S = \Sigma : S$ folgt $b : S = B : \Sigma$ oder $\frac{b}{S} = \frac{B}{\Sigma}$, welches wir $= \alpha$ nennen wollen, also ist $B = \alpha\,\Sigma$ und $b = \alpha\, S$; hier haben b, B, also $\frac{b}{S}, \frac{B}{S}$ oder α einen beständigen Werth, so lange S und Σ in einerlei Mittelpunktsentfernung r von einander stehen, bei der Mittelpunktsentfernung r' wird seyn $B' = \alpha\,\Sigma$ und $b' = \alpha'\, S$ aber $B : B' = \frac{\gamma \cdot \Sigma}{r^2} : \frac{\gamma \cdot \Sigma}{r'^2} = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}$ oder $\alpha\,\Sigma : B' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}$, woraus $\alpha = \frac{B' \cdot r'^2}{r^2\,\Sigma}$, woselbst Σ eine beständige Grösse und auch B' und r' als beständig angenommen werden kann, man also $\frac{B' \cdot r'^2}{\Sigma}$ der beständigen Grösse μ gleichsetzen darf, also ist $\alpha = \frac{\mu}{r^2}$, daher $B = \frac{\mu}{r^2} \cdot \Sigma$ und $b = \frac{\mu}{r^2}\, S$.

Ad S. 61. Z. 20. Das ist sehr undeutlich und will eigentlich so viel sagen: Gesetzt S und Σ hätten mit Anfange der Zeit t mit den Anfangsgeschwindigkeiten s, σ gegen einander zu laufen begonnen, in welchem ersten Zeitaugenblicke ihre Mittelpunkte von einander um die Länge A abgestanden wären; während Zeit t seyen sie gegen einander nach bestimmten Gesetzen fortgelaufen, dass mit Ende der Zeit t sie von einander um die Länge r abstanden, in welchem Zeitmomente die beschleunigenden Kräf-

te von S und Σ waren $\frac{\mu.\Sigma}{r^2}$ und $\frac{\mu S}{r^2}$ also deren Beschleunigungen während $dt = \frac{g.\mu.\Sigma}{r^2}$ und $\frac{g.\mu.S}{r^2}$, die Summe dieser Beschleunigungen nun, die Hr. Schubert die Geschwindigkeit ihrer Näherung nennt, ist $= g\,\mu\left(\frac{\Sigma + S}{r^2}\right)$; es drückt hier nemlich $g\,\mu\left(\frac{\Sigma + S}{r^2}\right)$ den Raum (die Summe jener zwei Räume) aus, um welchen sich S und Σ von Ende der Zeit t an während der Zeiteinheit nähern würden, wenn sie zu Ende der Zeit t von Geschwindigkeit o ausliefen, und an der beschleunigenden Kraft der einen und der andern Masse S und Σ während dieser Zeiteinheit nichts geändert würde. Dergleichen *Fictionen* sind in der höhern Mechanik sehr gebräuchlich, und müssen nur allemal ihrem wahren Sinne nach verstanden werden.

Ad S. 67. Z. 27. Kugelscheiben heisst hier unendlich dünne Kugelschalen, oder physische Kugeloberflächen von verschiedenen Radien, welche man erhielte, wenn man eine Kugel von aussen zu gegen den Mittelpunkt abschälen möchte. Eine solche Kugelscheibe war (Fig. 7.) die unendlich dünne Kugeloberfläche BbeE vom Radius $\frac{Cb + CB}{2} = Cb$. Das hier Gesagte ist wahr, wenn die Dichtigkeit dieser Kugelscheiben von aussen gegen das Centrum oder umgekehrt, dem Gesetze der Stetigkeit unterliegt.

Ad S. 69. Z. 10. Wenn (Taf. IV. Fig. 6.) [nahe an der Oberfläche der Erde gewogen] A, B, die Gewichte dieser zwei Kugeln ausdrücken, so ist m deren Schwerpunkt, wenn A . m . n = B . m . r. Hier wird erwiesen werden, dass der Mittelpunkt r des Planeten B um m Kegelschnitte beschreibt, und ganz nach denselben Gesetzen, statt um r wie in (II. Kapitel §. 29 der phys. Astr.) vom Punkte n behauptet wurde, und eben so beschreibt n um m Kegelschnitte; denn was von B in Bezug auf A wahr ist, muss es auch von A in Bezug auf B seyn, da Sonne und Planeten aus einerlei Elementen bestehen, die alle einerlei Gesetzen der allgemeinen Attraktion unterliegen.

Ad S. 70. Z. 14. Man sieht denselben Satz auch durch folgende Figur dargestellt, woselbst sich Jeder mit Hülfe der Elementargeometrie Auskunft geben kann, warum die Punkte 15, 15′, 15″, 15‴, ... (Taf. XIII. Fig. 2.) in einer geraden

Linie liegen, und warum zugleich 15 bis 15′ = 15′ bis 15″ = 15″ bis 15‴ = ... Hier ist angenommen, es bewegen sich (blos nach Trägheitsgesetz) gleichförmig fort nach AE, BD, CF die Gewichte 1 ℔, 2 ℔, 12 ℔, mit den Geschwindigkeiten 1 bis 1′ = 1′ bis 1″ = ... [2 bis 2′ = 2′ bis 2″] 12 bis 12′ = 12′ bis 12″ = ... Es sind also zu Anfange der Zeiten 0, 1, 2, 3, ... Sekunde die Gewichte 1, 2, 12, ... in folgenden Standpunkten: 1, 2, 12, [1′, 2′, 12′] [1″, 2″, 12″,] [1‴, 2‴, 12‴], daher ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt zu Ende der Zeiten 0, 1, 2, 3, ... Sekunden folgende Standpunkte einnimmt 15, 15′, 15″, 15‴, ...; denn (2 bis 3) : (3 bis 1) = 1 : 2, dann (3 bis 15): (15 bis 12) = 1 : 4 = 12 : 3, ..., daher der Schwerpunkt von 1 und 2 in 3 und jener von 1 + 2 = 3 und 12 im Punkte 15 liegt

Ad S. 70. Z. 17. A, B Gewichte der Körper AB, die Körper AB werden sphärisch und von Dichtigkeiten nach Art (Astr. §. 52.) angenommen, so dass in jeder Lage gegen einander die wechselseitige Anziehung der Mittelpunkte gerade so erfolgt, als ob beide Massen A, B, in ihren Mittelpunkten konzentrirt lägen.

Ad S. 70. Z. 19. Man nimmt hier an, es seyen A, B, in den Punkten A, B, aus dem Ruhestande ausgegangen, daher A, B, nur nach geraden Linien Aa, Bb, laufen können.

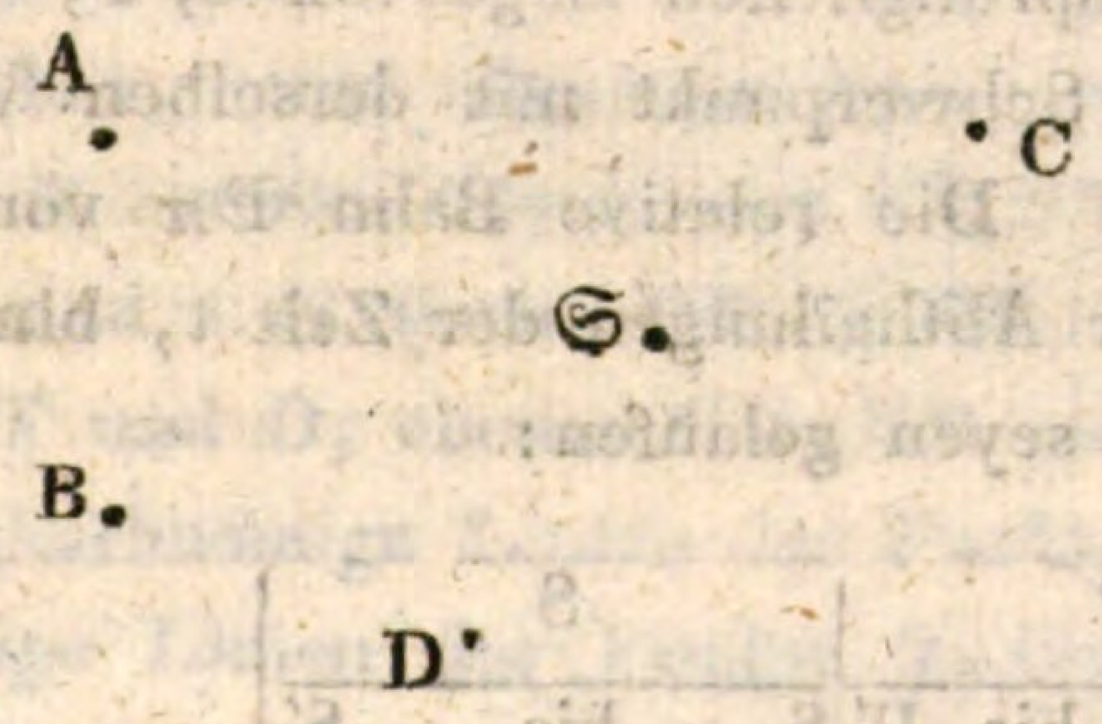
Ad S. 70. Z. 22. Das ist so gemeint: Nennen wir die in Zeit t von A, B durchlaufenen Räume Aa, Bb = S = s, die Endesgeschwindigkeiten von A und B zu Ende t oder zu Ende der Räume S, s, in a und b = V, v; ferner zu Ende t oder der Räume S, s, nemlich a und b die auf A und B nach a G und b G wirkenden bewegenden Kräfte = P, p, so ist $dv = 2g \cdot \frac{P}{A} \cdot dt$ oder $dt = \frac{A \cdot dV}{2g \cdot P}$ eben so $dv = \frac{2gp}{B} \cdot dt$ oder $dt = \frac{Bdv}{2gp}$ also $\frac{AdV}{2gP} = \frac{Bdv}{2gp}$, oder da (Astr. §. 48.) P = p ist, AdV = Bdv, also AV = Bv + C, aber für V = 0, auch v = 0, also A0 = B0 + C also C = 0, also AV = Bv oder $V = \frac{B}{A} \cdot v$.

Es ist ferner $dS = Vdt = \frac{B}{A} \cdot v \cdot dt$, also $dt = \frac{A \cdot dS}{B \cdot v}$, dann ist $ds = vdt$ oder $dt = \frac{ds}{v}$, also ist $\frac{AdS}{B \cdot v} = \frac{ds}{v}$ oder $\frac{AdS}{B} = ds$ oder AdS = Bds oder AS

$= Bs + C$, aber für $S = o$, auch $s = o$, also $Ao = Bo + C$, $C = o$, also $AS = Bs$ oder $A . Aa = B . Bb$.

Ad A. 70. Z. 23. Denn $AG . A = BG . B$, aber $AG = MG - MA$, $BG = MB - MG$, also $MG . A - MA . A = MB . B - MG . B$ oder $MG (A + B) = MA . A + MB . B$ oder $MG = \frac{MA . A + MB . B}{A + B}$.

Ad S. 71. Z. 7. Dieser abstrakte Satz kann nur durch anhaltendes Nachdenken volle Ueberzeugung gewähren; er ist einer der erhabensten Sätze der höhern Mechanik, und führt wieder auf die schon so oft bewunderte Einfachheit der Naturgesetze zurück. Der Geist des 56ten Paragraphs ist folgender: Gesetzt die Gewichte A, B, C, D zögen einander nicht an, und hätten nach beliebigen Richtungen gleichförmige beliebige Geschwindigkeiten, so läuft der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Gewichte A, B, C, D nach einer geraden Linie mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fort (Astr. §. 54.). Nun setze man, es fingen jählings A, B, C, D, an, einander nach den Gesetzen der allgemeinen Gravitation wechselseitig anzuziehen, so werden zwar hiedurch die Gewichte von ihren Richtungen abgelenkt werden können, und mit ungleichförmigen Geschwindigkeiten laufen müssen, es wird aber die Richtung und gleichförmige Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunkts der Gewichte A, B, C, D keineswegs eine Störung erleiden können; und zwar darum: Die jedesmalige Lage des Schwerpunkts 𝔖 der Gewichte A, B, C, D wird bestimmt durch die jedesmalige gleichzeitige Lagen des Schwerpunkts zwischen A und B, jenes zwischen A und D, jenes zwischen C und D, jenes zwischen D und B;



nun aber wird die Lage des Schwerpunkts zwischen A und B durch das wechselseitige Anziehen zwischen A und B nicht geändert; es hat dieses Anziehen zwischen A und B auf die Lage des Schwerpunkts zwischen A und B gar keinen Einfluss (Astr. §. 55.); eben so wird die Lage des Schwerpunkts zwischen A und C Also

haben alle diese wechselseitigen Anziehungen der Gewichte A, B, C, D, unter einander auf die jedesmalige Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunkts 𝔖 keinen Einfluss. Das Daseyn dieser wechselseitigen Anziehung ändert also am Laufe des Schwerpunkts 𝔖 nach obbenannter geraden Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit gar nichts.

Was Hr. Schubert im zweiten Absatze des 56ten Paragraphs sagt, ist eine Betrachtung, die dem philosophischen Geiste einen hohen Genuss gewähret, enthält aber den Beweis des hier behaupteten Satzes gar nicht, welchen Hr. Schubert Einem gerne aufdringen möchte; indessen bedarf dieser Satz keiner Bestätigung, da schon der erste Absatz dieses Paragraphs die vollste Ueberzeugung gewährt.

Ad S. 71. §. 57. Man erhält ganz dieselben Resultate, als in diesem §. 57. wenn man sich (Astr. §. 55. 56.) den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von P und S nach gerader Richtung $\alpha\beta$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit laufend vorstellt, und wenn man blos die relative Bewegung der Mittelpunkte P, S um C, und gegen einander betrachtet, ohne die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems in Betrachtung zu ziehen, (welches man sich nicht einfacher vorstellen kann, als wenn man sich auf einem ruhigen Brette einen festen Punkt denkt, um welchen zwei Körper eine beliebige Kurve beschreiben, und man blos auf diese Kurven sieht, ohne sich zu bekümmern, ob das ganze Brett stille steht, oder mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit nach irgend einer geraden Richtung fortläuft). Sey z. B. Schwerpunkt C in Zeit t von C nach c gekommen, und P von P nach p, und es war S zu Anfange t in S: so ist zu Ende t das S in s, wenn sp eine Gerade, (Taf. IV. Fig. 10.) und wenn (wie CS: CP = P: S) cs: cp = P: S, also wenn cs: cp = CS: CP; zieht man mn parallel SP der ursprünglichen Lage von S, P, so ist scm = pcn, also ist P um den fortschreitenden Schwerpunkt mit derselben Winkelgeschwindigkeit gelaufen während Zeit t als S. Die relative Bahn Pπ von P um S ist so entstanden (Fig. 11.): während gewisser Abtheilungen der Zeit t, binnen welcher Zeit t gelaufen sind P bis Q und S bis T, seyen gelaufen:

P			S		
Von P	bis	P′	S	bis	S′
— P′	—	P″	S′	—	S″
— P″	—	P‴	S″	—	S‴
— P‴	—	Q	S‴	—	T.

so waren in den Endpunkten dieser Zeitabtheilungen die relativen Orte der Masse P gegen S in den Punkten π', π'', π''', π, (Taf. IV. Fig. 9.) welche Punkte die relative Bahn von P um S bilden; diese Punkte π', π'', π''', π, ... sind so bestimmt worden: ziehe aus S die $S\pi' \ddagger S'P'$ und mache $S\pi' = S'P'$, ziehe ziehe aus S die $S\pi \ddagger TQ$ und mache $S\pi = TQ$.

Es ist in der höhern Analysis Seite 500 von Aehnlichkeit der Kurven die Rede, welches vorläufig nachzulesen, um den §. 57. der Astr. zu verstehen. Man bemerke: Seyen S, P beständige Grössen, sey bei den Kurven ST und PQ, $CS : CP = P : S$, (Taf. IV. Fig. 7.) ferner $TCS = QCP$, und $CT : CQ = P : S$ [und sey dieses wahr bei jedem Werthe der gleichen Winkel TCS und QCP] (Taf. IV. Fig. 8.) so sind diese zwei Kurven einander ähnlich; denn ziehe Tl, Qh $\perp$ auf CS, CP, so ist $\Delta\, TlC \backsim \Delta\, QPC$, also $Cl : Ch = CT : CQ$, oder $Cl : Ch = P : S$, eben so $Tl : Qh = P : S$. Es sind also die Kurven TS, QP so beschaffen, dass wenn (bei rechtwinklichten Ordinaten auf den Abscissenaxen CS und CP) die Abscisse $Cl = \frac{P}{S} . Ch$, auch die dazu gehörige Ordinate $Tl = \frac{P}{S} . Qh$. Es verhalten sich demnach in den Kurven TS, QP, die den Punkten T und Q, oder den Koordinaten Cl, lT, (Taf. IV. Fig. 11.) und Ch, hQ entsprechenden gleichnamigen Linien (als Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen, ...) wie $Cl : Ch = P : S$, z. B. $Ti : Qq = P : S$. Ferner verhalten sich die dem Punkte T und Q entsprechenden gleichnamigen Flächen $= Cl^2 : Ch^2 = P^2 : S^2$. z. B. $TCST : QCPQ = P^2 : S^2$. Gleichnamige Linien oder Flächen, ... überhaupt gleichnamige Funktionen die den Punkten T, Q, entsprechen, sind allgemein jene, welche an beiden Kurven auf einerlei Art entstehen, nach einerlei Gesetz von Cl, lT, und von Ch, hQ abhängen (Taf. IV. Fig. 12.); so sind z. B. (wenn $PR + CP$, $SV + CV$) SV, PR gleichnamige Linien der Punkte T und D; ebenso CV, CR gleichnamige Linien der Punkte T, Q; ebenso TV, QR gleichnamige Linien der Punkte T, Q; ebenso die rektifizirten ST, PQ gleichnamige Linien der Punkte T, Q; ebenso TSVT, QPRQ gleichnamige Flächen der Punkte T, Q, u. s. w.

Ad S. 72. Z. 9. *Vide* Euler Analysis des Unendlichen, übersetzt von Michelson 1788. II. Buch S. 350, §. 440

Man weiss aus der Elementaralgebra, dass die Proportion $CP : CS : SP = S : P : S + P$ eigentlich blos ein abgekürzter Ausdruck folgender zwei Proportionen ist:

[CP: CS = S: P] CP: SP = S: S + P, oder [CP: CS = S: P] CS: SP = P: S + P.

Ad S. 72. Z. 25. In jedem Punkte Q der Bahn PQ ist die beschleunigende Kraft von P nach dem Schwerpunkt (und Mittelpunkte der Bewegung) C dem Quotienten $\frac{S}{CQ^2}$ proportional, eben so ist in jedem Punkte T der Bahn ST (Taf. V. Fig. 1.) die beschleunigende Kraft von S nach dem Schwerpunkt (und Mittelpunkt d. B.) C dem Quotienten $\frac{P}{CT^2}$ proportional.

Ad S. 73. §. 59. Um diesen Paragraph verstehen zu können, muss folgendes bemerkt werden. Warum ist im Paragraph 57. die relative Bahn von P um S gerade so bestimmt worden, was ist eigentlich der Sinn dieses Ausdrucks relative Bahn ?

Es sey ein Punkt S fix oder er laufe selbst in Zeit t über ST, (Taf. V. Fig. 1.) so wird der dem Ende der Zeit t entsprechende relative Ort eines in Zeit t über PQ gelaufenen Punkts P bestimmt: durch die anfängliche Entfernung des P von S in der Lage SP oder TN (TN = und ‡ SP), durch den Winkel den zu Ende t die Richtung SP oder TN mit der von Q nach (dem Ende t entsprechenden) Standpunkte von S gezogenen Geraden bildet, und durch die Lagen dieser letztbeschriebenen Geraden. Ist also in Zeit t der Punkt P über PQ gelaufen, und S in S stehen geblieben, so ist zu Ende t die relative Lage von P gegen S bestimmt durch SP, QSP, QS, (Fig. 1. und Fig. 2.); ist hingegen in Zeit t P über PQ gelaufen, und S über ST, so ist zu Ende t die relative Lage von P in Q gegen S in T bestimmt (Fig. 1.) durch TN, QTN, QT. Es hat aber (Fig. 1.) Q gegen T dieselbe Lage als (Fig. 2.) π gegen S [wenn (Fig. 2.) nach Schubert (Fig. 11.) konstruirt ist]; es ist also Pπ (Fig. 11.) die Bahn, welche (durch P um einen festen Punkt S beschrieben) die Eigenschaft hat, dass der relative Ort π gegen S zu Ende t derselbe ist, als der relative Ort Q gegen T zu Ende t. Man begreift: die relative Bahn des (in Zeit t über PQ laufenden (Punktes P um S (sey S fix oder laufe es in Zeit t über ST) ist die Reihe von Punkten der relativen Orte von P gegen S zu Ende der unendlich kleinen und endlichen Zeiten τ, 2τ, 3τ, 4τ $\infty\,\tau$, $\infty\,\tau'$, ... t.

Ist z. B. um den Schwerpunkt C (Taf. XIII. Fig. 3.) in den unendlich kleinen Zeiten τ, 2τ, 3τ, . . . P von P bis P′, von P bis P″, von P bis P‴, ... und S von S bis S′, von S bis S″ gelaufen, so sind die relativen Standpunkte von P zu Ende τ, 2τ,

3τ, ... in Bezug auf das unverrückbare S in π, π', π'', . . . : wenn $S\pi'$ ‡ und = S′ P′, ...

Ad S. 73. Z. 19. V die beschleunigende Kraft, die S in Entfernung S P = s p ausübt.

Ad S. 73. Z. 21. $P\pi$ und p q sind ähnlich, wenn alle homogenen Linien bei den Kurven einerlei Verhältniss zu einander haben, wenn sie nemlich zu einander sich verhalten, = SP: sp. Gleich sind $P\pi$ uud p q überdiess, wenn nebstbei SP = sp, denn dann sind alle homogenen Linien in beiden Kurven gleich gross. Wenn πSP = qsp so SP: $S\pi$ = sp: sq, wenn $P\pi$, pq einander ähnlich.

Ad S. 74. Z. 2. Aus folgenden Gründen ist $T : \Theta = \tau : \theta$. Es ist (Astr. §. 58.) gezeigt worden, dass P und S (Fig. 11. um C Kegelschnitte nach dem Kepplerischen Gesetze beschreiben, als ob C ein Centralkörper wäre; betrachten wir demnach die Bahnen; welche (Fig. 11 und 12.) P und p um C und s beschreiben; nennen die Flächeninhalte PCQP = S, psqp = 𝔖, die Flächeninhalte, welche die ganzen Bahnen von P um C und von p um s in sich schliessen = S′ und 𝔖′, so ist (Astr. §. 20.) $S : S' = T : \tau$, eben so $\mathfrak{S} : \mathfrak{S}' = \Theta : \theta$; also $S = \frac{S'.\,T}{\tau}$, $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{S}.\,\Theta}{\theta}$,

daher $S : \mathfrak{S} = \frac{S'.\,T}{\tau} : \frac{\mathfrak{S}'\,\Theta}{\theta}$, aber wegen der Aehnlichkeit der Kurven PQ, pq, und da QCP = qsp, so $S : \mathfrak{S} = CP^2 : sp^2$, eben so $S' : \mathfrak{S}' = CP^2 : sp^2$, also $\tau : \theta = T : \Theta$. Sind Θ und θ die Zeiten, binnen welchen (Fig. 11.) P um C seine ganze Bahn und das Stück PQ beschreibt, so sind diess auch die Zeiten, binnen welchen P um S in der relativen Bahn $P\pi$ die ganze Bahn und das Stück $P\pi$ beschreibt (Astr. §. 57.).

Um den §, 59. wohl zu verstehen, ist hier noch zu bemerken: (Fig. 11.) PQ ist ein Kegelschnitt, z. B. eine Ellipse, und da P in PQ sich um C eben so bewegt, als ob C ein Centralkörper wäre, so ist C ein Brennpunkt dieser Ellipse. (Astr. §. 34.) Ist nun $P\pi$ mit PQ ähnlich, nemlich, wenn πSP = QCP ist, $S\pi$: CQ = SP: CP, so folgt aus dem Begriffe der Aehnlichkeit zweier Kurven, dass in der Ellipse $P\pi$ der Punkt S ebenfalls ein Brennpunkt seyn müsse, und wenn in der Ellipse PQ das CP das Apogäum (P als Erde betrachtet) ist, dass auch in der Ellipse $P\pi$ das SP das Apogäum seyn müsse. Eben so, wenn $P\pi$ und pq ähnliche Kurven sind, und SP ist das Apogäum, so ist auch sp das Apogäum; S, und s die homologen Brennpunkte. P und p sind homologe Punkte wie π und q. Ueberhaupt muss,

um diesen §. zu verstehen, der Geist der Aehnlichkeit der Kurven sehr genau gefasst werden.

Ad S. 78. Z. 39. Sey bei einem Centralkörper die beschleunigende Kraft in der Entfernung = 1 oder die absolute Centralkraft = $\mathfrak{A}$, die beschleunigende Kraft in Entfernung R = $\mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = R^2 : 1$, also $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{R^2}$. Eben so bei einem andern Centralkörper $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}}{r^2}$, sind nun R und r so gross, dass $\frac{\mathfrak{A}}{R^2} = \frac{\mathfrak{a}}{r^2}$, oder dass $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}$, so folgt $\mathfrak{A} : \mathfrak{a} = R^2 : r^2$, oder wenn $\overset{X}{\mathfrak{B}}$ und $\overset{X}{\mathfrak{b}}$ die beschleunigenden Kräfte dieser Centralkräfte in den Entfernungen X und X sind $\overset{X}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}}{X^2}$, $\overset{X}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}}{X^2}$ also $\overset{X}{\mathfrak{B}} : \overset{X}{\mathfrak{b}} = R^2 : r^2$.

Ad S. 81. Z. 21. ω Sonnenparallaxe, A Erdbahnhalbmesser, $\mathfrak{E}$ Erdhalbmesser, $\mathfrak{E} = A \cdot \omega$, $A = \frac{\mathfrak{E}}{\omega}$, $R = \rho A = \frac{\rho \cdot A}{\omega} = \frac{\rho}{\omega}$, wenn $\mathfrak{E} = 1$.

Ad S. 81. Z. 24. Wenn $\mathfrak{D}$ die Dichtigkeit, und $\mathfrak{M}$ die Masse der Erde, eigentlich $\Delta = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{M}{\frac{2}{3} C}$, wenn M die Masse des Planeten ist.

Ad S. 81. Z. 25. Eigentlich $\Delta = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{3}{4} \cdot v \cdot \mu^2 \cdot n^3$, also $\Delta : \Delta' = \mu^2 \cdot n^3 \cdot \mu'^2 \cdot n'^3$.

Ad S. 81. Z. 29. Unmittelbar sieht man aus dem hier Gesagten, wie auch schon (§. 38.) angemerkt worden, dass die Dichtigkeit eines Centralkörpers von den Argumenten der Bewegung eines andern Körpers über ihn seine Bestimmung erhalte. Z. B. die Dichtigkeit der Sonne ist bestimmt durch die Argumente der Bewegung der Erde um die Sonne, oder durch die Argumente der Bewegung des Mars um die Sonne, oder Eben so ist die Masse des Jupiters bestimmt, durch die Argumente der Bewegung eines der Jupiters-Trabanten u. s. w.

Ad S. 88. Z. 15. Es ist aus der in der Elementarstatik abgehandelten Theorie des Schwerpunktes folgendes leicht zu begreifen: Wenn die Massen (an Gewicht) (Taf. V. Fig. 3.) = nm, qm, hm, Im, dm von den bewegenden Kräften np, qp,

hp, lp, dp, nach parallelen Richtungen bestimmt werden, so laufen alle diese Massen mit einerlei beschleunigter Bewegung fort, bleiben also gegen einander in unveränderter Lage, haben gegen einander keine relative Bewegungen, wenn vor dem Ergriffenwerden von besagten bewegten Kräften keine relativen Bewegungen Statt fanden. Die Entfernung des Schwerpunkts der Gewichte dm, lm, hm, qm, nm, von C ist:

$$= \frac{Ca.d.m + Cb.l.m + Cc.h.m + Cd.q.m + Cs.n.m}{d.m + l.m + h.m + q.m + n.m}$$

$$= \frac{Ca.d + Cb.l + Cc.h + Cd.q + Cs.n}{d + l + h + q + n}.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts der bewegenden Kräfte d.p, l.p, h.p, q.p, n.p, von C ist:

$$= \frac{Ca.d.p + Cb.d.p + Cc.h.p + Cd.q.p + Cs.n.p}{dp + lp + hp + qp + np}$$

$$= \frac{Ca.d + Cb.l + Cc.h + Cd.q + Cs.n}{d + l + h + q + n};$$

also fallen beide Schwerpunkte in einerlei Punkt x. Besteht nun in diesem Punkte x eine den parallel bewegenden Kräften entgegen wirkende fixe Unterlage, so besteht um x keine Rotation, alle fortschreitende Bewegung der Massen ist = o, und die fixe Unterlage drückt entgegen = dp + lp + hp + qp + np; dieser Druck in x nach besagter Richtung hat also dieselbe aber entgegengesetzte Wirkung als die Drucke dp, lp, hp, qp, np zusammen in a, b, c, d, s angebracht. Beständen demnach diese Drucke in a, b, c, d, s, nicht, und blos in x der Druck dp + lp + hp + qp + np, so bestünde nach negativer Richtung dieselbe beschleunigte Bewegung für unsere Massen, als nach positiver Richtung, wenn in x kein Druck und in den Punkten a, b, c, d, s die bewegenden Kräfte dp, lp, hp, qp, np nach positiver Richtung wirken möchten.

Ad S. 89. Z. 9. In dem folgenden Paragraph dieses Kapitels wollen wir untersuchen, welche Drucke eine Axe, um welche ein Körper sich binnen dt mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit bewegt, binnen diesem dt in allen ihren Punkten erleidet; diese Drucke binnen dt entstehen 1) aus den Schwungkräften der um diese Axe laufenden Körperelemente, 2) aus den äussern Kräften, welche auf den Körper binnen dt wirken; erstere Drucke werden in den Paragraphen von 77 bis 82, und beide zusammen in den §. 83, 84. abgehandelt.

um diesen §. zu verstehen, der Geist der Aehnlichkeit der Kurven sehr genau gefasst werden.

Ad S. 78. Z. 39. Sey bei einem Centralkörper die beschleunigende Kraft in der Entfernung = 1 oder die absolute Centralkraft = $\mathfrak{A}$, die beschleunigende Kraft in Entfernung R = $\mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = R^2 : 1$, also $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{R^2}$. Eben so bei einem andern Centralkörper $\mathfrak{b} = \frac{a}{r^2}$, sind nun R und r so gross, dass $\frac{\mathfrak{A}}{R^2} = \frac{a}{r^2}$, oder dass $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}$, so folgt $\mathfrak{A} : a = R^2 : r^2$, oder wenn $\overset{X}{\mathfrak{B}}$ und $\overset{X}{\mathfrak{b}}$ die beschleunigenden Kräfte dieser Centralkräfte in den Entfernungen X und X sind $\overset{X}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}}{X^2}$, $\overset{X}{\mathfrak{b}} = \frac{a}{X^2}$ also $\overset{X}{\mathfrak{B}} : \overset{X}{\mathfrak{b}} = R^2 : r^2$.

Ad S. 81. Z. 21. ω Sonnenparallaxe, A Erdbahnhalbmesser, $\mathfrak{E}$ Erdhalbmesser, $\mathfrak{E} = A \cdot \omega$, $A = \frac{\mathfrak{E}}{\omega}$, $R = \rho A = \frac{\rho \cdot A}{\omega} = \frac{\rho}{\omega}$, wenn $\mathfrak{E} = 1$.

Ad S. 81. Z. 24. Wenn $\mathfrak{D}$ die Dichtigkeit, und $\mathfrak{M}$ die Masse der Erde, eigentlich $\Delta = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{M}{\frac{2}{3} C}$, wenn M die Masse des Planeten ist.

Ad S. 81. Z. 25. Eigentlich $\Delta = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{3}{4} \cdot v \cdot \mu^2 \cdot n^3$, also $\Delta : \Delta' = \mu^2 \cdot n^3 \cdot \mu'^2 \cdot n'^3$.

Ad S. 81. Z. 29. Unmittelbar sieht man aus dem hier Gesagten, wie auch schon (§. 38.) angemerkt worden, dass die Dichtigkeit eines Centralkörpers von den Argumenten der Bewegung eines andern Körpers über ihn seine Bestimmung erhalte. Z. B. die Dichtigkeit der Sonne ist bestimmt durch die Argumente der Bewegung der Erde um die Sonne, oder durch die Argumente der Bewegung des Mars um die Sonne, oder Eben so ist die Masse des Jupiters bestimmt, durch die Argumente der Bewegung eines der Jupiters-Trabanten u. s. w.

Ad S. 88. Z. 15. Es ist aus der in der Elementarstatik abgehandelten Theorie des Schwerpunktes folgendes leicht zu begreifen: Wenn die Massen (an Gewicht) (Taf. V. Fig. 3.) = nm, qm, hm, lm, dm von den bewegenden Kräften np, qp,

hp, lp, dp, nach parallelen Richtungen bestimmt werden, so laufen alle diese Massen mit einerlei beschleunigter Bewegung fort, bleiben also gegen einander in unveränderter Lage, haben gegen einander keine relative Bewegungen, wenn vor dem Ergriffenwerden von besagten bewegten Kräften keine relativen Bewegungen Statt fanden. Die Entfernung des Schwerpunkts der Gewichte dm, lm, hm, qm, nm, von C ist:

$$= \frac{Ca.\ d.\ m + Cb.\ l.\ m + Cc.\ h.\ m + Cd.\ q.\ m + Cs.\ n.\ m}{d.\ m + l.\ m + h.\ m + q.\ m + n.\ m}$$

$$= \frac{Ca.\ d + Cb.\ l + Cc.\ h + Cd.\ q + Cs.\ n}{d + l + h + q + n}.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts der bewegenden Kräfte d. p, l. p, h. p, q. p, n. p, von C ist:

$$= \frac{Ca.\ d.\ p + Cb.\ d.\ p + Cc.\ h.\ p + Cd.\ q.\ p + Cs.\ n.\ p}{dp + lp + hp + qp + np}$$

$$= \frac{Ca.\ d + Cb.\ l + Cc.\ h + Cd.\ q + Cs.\ n}{d + l + h + q + n};$$

also fallen beide Schwerpunkte in einerlei Punkt x. Besteht nun in diesem Punkte x eine den parallel bewegenden Kräften entgegen wirkende fixe Unterlage, so besteht um x keine Rotation, alle fortschreitende Bewegung der Massen ist = o, und die fixe Unterlage drückt entgegen = dp + lp + hp + qp + np; dieser Druck in x nach besagter Richtung hat also dieselbe aber entgegengesetzte Wirkung als die Drucke dp, lp, hp, qp, np zusammen in a, b, c, d, s angebracht. Beständen demnach diese Drucke in a, b, c, d, s, nicht, und blos in x der Druck dp + lp + hp + qp + np, so bestünde nach negativer Richtung dieselbe beschleunigte Bewegung für unsere Massen, als nach positiver Richtung, wenn in x kein Druck und in den Punkten a, b, c, d, s die bewegenden Kräfte dp, lp, hp, qp, np nach positiver Richtung wirken möchten.

Ad S. 89. Z. 9. In dem folgenden Paragraph dieses Kapitels wollen wir untersuchen, welche Drucke eine Axe, um welche ein Körper sich binnen dt mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit bewegt, binnen diesem dt in allen ihren Punkten erleidet; diese Drucke binnen dt entstehen 1) aus den Schwungkräften der um diese Axe laufenden Körperelemente, 2) aus den äussern Kräften, welche auf den Körper binnen dt wirken; erstere Drucke werden in den Paragraphen von 77 bis 82, und beide zusammen in den §. 83, 84. abgehandelt.

Ad S. 90. Z. 15. Deutlicher wird das hier Gesagte so erwiesen. Physische Linie AM (Taf. V. Fig. 4.) an Masse = M′ drehe sich um Punkt C mit Winkelgeschwindigkeit γ; heisse CA = ϱ, Masse CA = μ, CM = r, Masse CM = m, sey γ Schwerpunkt des Stücks CA, und g Schwerpunkt des Stücks CM, $C\gamma = x$, $Cg = X$, endlich G′ Schwerpunkt des Stücks AM; ferner heisse Summe aller Centrifugalkräfte von C bis A = φ, und von C bis M = f, so ist $d\varphi = \frac{\gamma^2}{2g}\varrho d\mu$, also $\varphi = \frac{\gamma^2}{2g}\int\varrho d\mu$; eben so $f = \frac{\gamma^2}{2g}\int r dm$.

Nun ist $X = \frac{\int r dm}{m}$, $x = \frac{\int\varrho d\mu}{\mu}$, ferner $m.gG' = \mu.G'\gamma$ oder $m(\mu X - CG') = \mu(GC + x)$, woraus $CG' = \frac{mX - \mu x}{m + \mu} = \frac{mX - mx}{M'}$; also $CG'.M' = mX - \mu x = -\int r dm - \frac{\mu\int\varrho d\mu}{\mu} = \frac{2gf}{\gamma^2} - \frac{2g}{\gamma^2}\varphi = \frac{2g}{\gamma^2}(f - \varphi)$, also $f - \varphi = \frac{\gamma^2}{2g}.CG'.M'$, welches = o ist, wenn CG′ = o, d. h. der Drehpunkt C im Schwerpunkte G′ der Masse AM ist.

Ad S. 90. Z. 16. Soll dieser Absatz verstanden werden, so ist vorerst Folgendes zu erwägen: Drehe ich mit Winkelgeschwindigkeit γ um C (Taf. V. Fig. 5.) die unbeugsame Ck = p ohne Masse, woran die gleich dichte gerade materielle Stange ab im festen Zusammenhange unter rechtem Winkel Ckb befestigt ist, so dass ab ihre Lage folgendermaassen ändert (Taf. II. Fig. 11.): ab wird als eine kleine 4kantige Stange von unendlich kleinem Querschnitte $\mathfrak{S}$ genommen. Sey Gewicht kubischer Einheit der Stange = $\mathfrak{f}$, so ist das Gewicht des Parallelepipedons im von 3 unendlich kleinen Dimensionen $= \mathfrak{f}\mathfrak{S}.im = \mathfrak{f}.\mathfrak{S}.i.C.\frac{d\psi}{\mathrm{Cos}\,\psi} = \mathfrak{f}.\mathfrak{S}.\frac{d\psi}{\mathrm{Cos}\,\psi}.\frac{r}{\mathrm{Cos}\,\psi}$. Diese unendlich kleine Masse im läuft um C mit Winkelgeschwindigkeit γ von Radius $iC = \frac{r}{\mathrm{Cos}\,\psi}$, also ist deren Centrifugalkraft nach $i\lambda$ oder $m\beta = \frac{\gamma^2}{2g}.\frac{r}{\mathrm{Cos}\,\psi}.\mathfrak{f}.\mathfrak{S}.\frac{d\psi}{\mathrm{Cos}\,\psi}.\frac{r}{\mathrm{Cos}\,\psi} =$

$\frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r² $\frac{d\psi}{Cos^2\psi . Cos\psi}$. welcher Druck sich nach iδ ⊥ ab äussert $= \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r². $\times$ $\frac{d\psi}{Cos^2\psi . Cos\psi}$. Cos ψ. Nennen wir demnach S′ die Summe aller auf ab senkrechten Drucke von a bis i, welche durch die Centrifugalkräfte aller Theile der ab (von unendlich kleiner Länge) von a bis i entstehen, so d$S' = \frac{\gamma^2}{2g}$ f. 𝔊. r². $\frac{d\psi}{Cos^2\psi}$, also $S' = \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r². tang. ψ + C, für $\psi = -$ b ist S′ = o, also o $= \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r². $\times$ tang (— b) + C, also $S' = \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r² (tang ψ — tang (— b)); aber - ak : r = tang (— b): 1, tang (— b) $= -\frac{ak}{r}$, und ki : r = tang ψ : 1, tang $\psi = \frac{ki}{r}$, also $S' = \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. rr $\left(\frac{ki + ak}{r}\right) = \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r. ai; wird demnach diese Summe von a bis b = S genannt, so $S = \frac{\gamma^2}{2g}$. f. 𝔊. r. ab $= \frac{\gamma^2}{2g}$. r. P, wenn P das Gewicht der Stange ist.

Bei dieser körperlichen Ebene von durchaus gleicher Dicke wachse die Dichtigkeit nach einem Gesetze der Stetigkeit von d nach b zu (Taf. V. Fig. 6.), so, dass die zwischen zwei auf db senkrecht gezogenen geraden durch die Kurve cabcd begrenzten Linien ac und sk eingeschlossene Masse acksa eine Funktion der Entfernungen GC, Gm dieser zwei Senkrechten ac, sk von einem angenommenen Punkte G seyen. Durch C′ werde senkrecht auf diese Ebene eine Axe gesteckt, um welche das Stück $\alpha\beta\delta\mu\alpha$ mit Winkelgeschwindigkeit γ sich dreht; in G′ sey der Schwerpunkt des Stücks $\alpha\beta\delta\mu\alpha$ in γ', jener des Theils $\alpha\beta$caα in g′, jener des Theils $\delta\mu$acδ. Heisst μ die Masse ac$\beta\alpha$a und C$\varrho = \varrho$, ferner m die Masse ac$\delta\mu$a und Cr = r, ferner σ die Summe der Centrifugalkräfte nach Cb durch die Rotation von ac$\beta\alpha$a um C′, und s′ die Summe der Centrifugalkräfte nach cd durch die Rotation von ac$\delta\mu$a um C′ (beide Rotationen mit Winkelgeschwindigkeit γ), so ist $d\sigma = \frac{\gamma^2}{2g}\,\varrho . d\mu$, also $\frac{\gamma^2}{2g} \int \varrho\, d\mu$ und $ds = \frac{\gamma^2}{2g}$ rdm, also $s = \frac{\gamma^2}{2g} \int r dm$; heisse C$\gamma$ = x, Cg = X, so ist $x = \int \varrho d\mu$, $X = \frac{\int r dm}{m}$; ferner ist μ. Gγ = m. Gg oder μ (GC + x) = m (X — CG), oder $\mu . \left(GC + \frac{\int \varrho d\mu}{\mu}\right) =$

$m\left(\frac{\int r\,dm}{m} - CG\right)$ oder $\mu.\ CG + \int\varrho\,d\mu = \int r\,dm - m.\ CG$, woraus

$CG = \frac{\int r\,dm - \int\varrho\,d\mu}{m+\mu}$. Nennen wir $M' = m + \mu$ die Masse $\alpha\beta\delta\mu\alpha$, so

$CG = \frac{\int r\,dm - \int\varrho\,d\mu}{M'}$, also $CG.\ M' = \int r\,dm - \int\varrho\,d\mu = \frac{2g.\ s}{\gamma^2} - \frac{2g.\ \sigma}{\gamma^2} =$

$\frac{2g}{\gamma^2}(s - \sigma)$, also ist $s - \sigma = \frac{\gamma^2}{2g}.\ CG.\ M'$. Soll also C' durch die Centrifugalkräfte nach Cb und Cd keinen Druck weder nach der einen noch nach der andern Richtung Cb und Cd erleiden, so muss CG = o seyn, d. h. es muss die Axe durch einen Punkt der Geraden AB laufen. Ist die Axe in C', so muss dieser Punkt mit einer Kraft $\frac{\gamma^2}{2g}.\ CG.\ M'$ nach Cd unterstützt werden, wenn C' nicht nach Cb beschleunigt werden soll. Man begreift, dass wenn die Axe durch einen Punkt der AB läuft, wodurch sie nach den Richtungen Gb und Gd keinen Druck erleidet, sie deshalb noch keine freie Axe genannt werden könne, welche ohne Unterstützung nach keiner Seite hin eine Ueberwucht erleidet, denn geht z. B. besagte Axe durch N, so kann der Punkt N nach NB eine Ueberwucht erleiden; Geht aber die Axe durch G', (Taf. V. Fig. 7.) so erleidet sie keine Ueberwucht nach Gb noch GB, also nach gar keiner Seite um und um von G'; denn ein Druck nach $G'\alpha$ = Gk wäre so viel als einer nach G'B = G's und einer nach G'b = G'o. Liefe die Axe durch C', so wäre der Druck von C' nach $Cb = \frac{\gamma^2}{2g}.\ CG.\ M'$ und nach $Cc = \frac{\gamma^2}{2g}.\ C''G.\ M'$. Drückt man diese zwey Drucke an Richtung und Grösse durch C'x und C'y aus (Taf. V. Fig. 8.), so ist der Druck von C' an Richtung und Grösse ausgedrückt durch C'z. Soll demnach C stille stehen, oder nur gleichförmig wie eine in Bewegung träge Masse nach irgend einer Richtung $C'\delta$ laufen, so muss C' unterstützt seyn durch einen Druck nach zC' an Grösse = zC'. Hiernach liesse z. B. folgende Aufgabe sich lösen: Die Ebene Ab Bde A soll um die senkrechte Axe, die durch C' läuft, mit Winkelgeschwindigkeit γ gleichförmig laufen, doch soll von C aus eine in der Ebene liegende Stange ohne Masse an ihrem Ende mit einer Schwungkugel versehen seyn, so dass diese Schwungkugel um C mit der Ebene herumläuft, und dass hierdurch die Axe nach keiner Seite hin eine Ueberwucht erleide; welchen Winkel muss diese Stange C'c machen? wie lang muss sie seyn? wie schwer soll die Schwungkugel seyn?

Ad S. 91. §. 76. Durch diesen §. soll eigentlich folgendes gesagt seyn:

Dieser Körper acdebc (Taf. V. Fig. 9.) unterliege einem steten Gssetze in Bezug seines Volumens und einem steten Gesetze in Bezug seines Dichtigkeitsverhältnisses. Sey M das Gewicht, das der Abscissenaxe A𝔛 = x entspricht, so ist dM sein Zuwachs an Gewicht, wenn x um dx wächst, nemlich dM das Gewicht der auf AB in X senkrechten Schichte vom Querschnitte acdea und von der Höhe dx. Denken wir uns nun durch AB eine auf die Ebene des Papiers senkrecht gestellte Ebene, stellen uns acdebc in lauter auf AB senkrechte unendlich dünne Schichten getheilt vor, nennen den senkrechten Abstand des Schwerpunkts der dem x entsprechenden Schichte dM von der Ebene AB allgemein = y, so ist $\int y\,dM$ die Summe der Produkte aller Gewichte der Schichten von b bis 𝔛 in die senkrechten Abstände ihrer Schwerpunkte von der Ebene AB, daher ist (§. 75.) $\frac{\gamma^2}{2g}\int y\,dM$ der totale Druck D der durch die Schwungkräfte aller Schichten von b bis ad senkrecht auf AB entsteht. Hier wird angenommen, dass die Ebene AB fest in dem Körper ist, sich also mit herumdreht, und dass um die Axe AB die Rotation des Körpers mit Winkelgeschwindigkeit γ vor sich geht. Soll nun D = o seyn, so muss $\int y\,dM = o$ seyn, also die Ebene AB durch des Körpers Schwerpunkt laufen. Denken wir uns ferner durch die Axe AB eine Ebene parallel zur Ebene des Papiers gelegt, welche wir A′B′ nennen, und welche (wir vorhin die Ebene AB) fest im Körper ist, also sich mit herumdreht, wenn der Körper um Axe AB mit Winkelgeschwindigkeit γ läuft (Ebene AB und A′B′ schneiden sich in Axe 𝔄𝔅 unter einem rechten Winkel), nennen z den senkrechten Abstand des Schwerpunktes der Schichte dM, welche x entspricht, so ist $\int z\,dM$ die Summe der Produkte aller Gewichte der Schichten von b bis X in die senkrechten Abstände ihrer Schwerpunkte von der Ebene A′B′, daher ist (§. 75.) $\frac{\gamma^2}{2g}\int z\,dM$ der totale Druck D, der durch die Schwungkraft aller Schichten von b bis ad senkrecht auf A′B′ entsteht. Soll nun D′ = o seyn, so muss $\int z\,dM = o$ seyn, also die Ebene A′B′ durch des Körpers Schwerpunkt laufen. Soll demnach die Axe AB weder ⊥ auf Ebene AB noch ⊥ auf Ebene A′B′ (folglich nach keiner Seite senkrecht auf sich selbst) eine fortschreitende Beschleunigung erleiden, so muss seyn $\int y\,dM = o$ und $\int z\,dM = o$, d. h. es muss die Axe AB durch den Schwerpunkt des Körpers acdebc gehen. Sey dieser z. B. in G, so folgt nicht umgekehrt, dass jede durch G laufende Axe 𝔄𝔅 ohne fortschreitende Beschleunigung senkrecht auf sich selbst seyn werde, wenn der Körper acdebc sich um 𝔄𝔅 mit Winkel-

geschwindigkeit γ dreht. Die Rotationsaxe AB erleidet nur in dem Falle keine eigene Rotation um irgend einen Punkt A, durch den die Centrifugalkräfte aller auf Axe AB senkrechten Schichten gehen, wenn alle auf Schichte AB und jene auf Schichte A′B′ senkrechten Drucke $=$ o sind, d. h. wenn die Axe AB durch die Schwerpunkte aller Schichten von b bis $\mathfrak{X}$ läuft, oder auch wenn der Schwerpunkt der Drucke senkrecht auf Ebene AB nach einer Richtung und der Schwerpunkt der Drucke senkrecht auf der Ebene AB nach entgegengesetzter Richtung in einen und denselben Punkt fallen, und wenn zugleich dasselbe in Bezug der Ebene A′B′ Statt findet, wenn also $\int x.\,y\,dM = o$ und zugleich $\int x.\,z\,dM = o$ ist. Dass die letzten zwei Gleichungen, die in Worten ausgedrückt zwei zugleich Statt zu findenden Bedingnisse der Nichtrotation der Axe AB um A ausdrücken, folgt hieraus: Nennen wir $p^{+}, p^{++}, p^{+++}, \dots, p$, die Drucke der Schichten von b bis $\mathfrak{X}$ $\perp$ auf Ebene AB nach einer Richtung, und $P^{+}, P^{++}, P^{+++}, \dots P$ die Drucke der Schichten von b bis $\mathfrak{X}$ $\perp$ auf Ebene AB nach entgegen gesetzter Richtung, so fällt der Schwerpunkt von $p^{+}, p^{++}, p^{+++}, \dots p$, und jener von $P^{+}, P^{++}, P^{+++} \dots P$ in einerlei Punkt (statt in einerlei Punkt soll es hier heissen in einerlei senkrechten Abstand von der durch A senkrecht auf die Ebene des Papiers gezogenen Axe) wenn $(x^{+}, x^{++}, x^{+++}, \dots x$, dann $\mathfrak{X}^{+}, \mathfrak{X}^{++}, \mathfrak{X}^{+++}, \dots$, x die Abstände der Schichten von der durch A auf des Papiers Ebene senkrechten Axe)

$$\frac{\overset{+}{x}.\overset{+}{p} + \overset{++}{x}.\overset{++}{p} + \overset{+++}{p} + \dots x.\,p}{p^{+} + p^{++} + p^{+++} + \dots + p} = \frac{\overset{+}{\mathfrak{X}}.\overset{+}{P} + \overset{++}{\mathfrak{X}}.\overset{++}{P} + \overset{+++}{\mathfrak{X}}.\overset{+++}{P} + \dots + x.\,P}{P^{+} + P^{++} + P^{+++} + \dots + P}$$ oder wenn

$$\frac{\overset{+}{x}.\overset{+}{p} + \overset{++}{x}.\overset{++}{p} + \overset{+++}{x}.\overset{+++}{p} + \dots + x.\,p}{p^{+} + p^{++} + p^{+++} + \dots p} - \frac{(\overset{+}{\mathfrak{X}}.\overset{+}{P} + \overset{++}{\mathfrak{X}}.\overset{++}{P} + \dots + x.\,P}{P^{+} + P^{++} + \dots + P} = o$$ oder

wenn $\frac{\int x.\,p}{\overset{+}{p} + \overset{++}{p} + \dots + p} = o$ oder wenn $\frac{\int x.\,P}{P^{+} + P^{++} + \dots P} = o$, also wenn $\int x.\,p = o$ oder $\int x.\,P = o$ ist; nun ist aber p oder $P = y\,dM$ u. s. w.

Wir sehen demnach, dass die Rotation mit Winkelgeschwindigkeit γ des Körpers acdebc um Axe AB zu einer Nichtbeschleunigung sowohl in Bezug der fortschreitenden Bewegung der Axe AB senkrecht auf sich selbst, als in Bezug der Rotation der Axe AB um irgend einen ihrer Punkte folgende 4 Gleichungen Statt finden müssen: $\int y\,dM = o$, $\int z\,dM = o$, $\int xy\,dM = o$, $\int x.\,z.\,dM = o$; erstere zwei Gleichungen bestimmen Axe AB durch des Körpers Schwerpunkt.

Es wird die Axe A$\mathfrak{X}$ eine freie Axe für den Körper acdebc seyn, 1) wenn sie durch den Schwerpunkt läuft, 2) wenn sie eine solche Lage hat, dass $\int xy\,dM = o$ und

$\int xz\,dM = 0$ ist, woselbst x, y, z die 3 senkrechten Koordinaten sind, welche die Lage von $A\mathfrak{X}$ bestimmen; (x ist die Länge $A\mathfrak{X}$ in der Schneidelinie der Ebenen AB und A'B' von A aus gemessen) y die am Ende von x in der Ebene AB liegende ⊥ auf x Gezogene, welche so lang ist, dass am Ende von y eine auf Ebene AB senkrecht Gezogene den Schwerpunkt z der Schichte dM trifft (z die am Ende y senkrecht auf Ebene AB Gezogene, von der Ebene AB an bis zum Schwerpunkt z der Schichte dM gemessen).

Die Ausdrücke $\int y\,dM$, $\int z\,dM$, $\int xy\,dM$, $\int xz\,dM$ können auch noch auf eine andere Art verstanden werden, als sie hier erklärt wurden. Bedeuten y', z' dann y'', z'', dann y''', z''', dann y'''', z'''', ... die auf dem Endpunkte von x gezogenen senkrechten Koordinaten, welche die Lage jedes einzelnen Körperelements dM', dM'', dM''', dM'''' in der Schichte dM auf ähnliche Art bestimmen, als y und z die Lage des Schwerpunktes in dM festsetzen, so ist

$$y = \frac{y'.\,dM' + y''.\,dM'' + y'''.\,dM''' + \ldots}{dM' + dM'' + dM''' + \ldots} = \frac{\int y'\,dM'}{dM},$$ woselbst $\int$ nicht Integral,

sondern Summe heisst, es bedeutet nemlich $\int y'\,dM'$ die Summe aller Produkte aus den Elementen dM', ... in ihre Abstände y', ... in der ganzen Schichte dM. In eben dem Sinne ist $z = \frac{z'dM' + z''dM'' + \ldots}{dM' + dM'' + \ldots} = \frac{\int z'dM'}{dM}$, also ist

$y\,dM = x\int y'\,dM'$, $xz\,dM = x\int z'\,dM'$. Nun heisst Integrale von $y\,dM$ oder $\int y\,dM$ nichts anders, als die Summe aller $y\,dM$ auf alle unendlich dünne Schichten (senkrecht auf $A\mathfrak{X}$) bezogen, woraus der Körpertheil, welcher $A\mathfrak{X} = x$ entspricht, besteht; nennen wir demnach $\overset{+}{\mathfrak{x}}$, $\overset{+}{\mathfrak{y}}{}'$, $\overset{+}{\mathfrak{y}}{}''$, $\overset{+}{\mathfrak{y}}{}'''$, ... $\overset{+}{\mathfrak{z}}$, $\overset{+}{\mathfrak{z}}{}''$, $\overset{+}{\mathfrak{z}}{}'''$, ... $d\overset{+}{M}{}'$, $d\overset{+}{M}{}''$, $d\overset{+}{M}{}'''$, ... dann $\overset{++}{\mathfrak{x}}$, $\overset{++}{\mathfrak{y}}$, $\overset{++}{\mathfrak{y}}{}''$, ... $\overset{++}{\mathfrak{z}}{}'$, $\overset{++}{\mathfrak{z}}{}''$, ... $d\overset{++}{M}$, $d\overset{++}{M}{}''$, ... allgemein in jeder solchen Schichte dM^{+}, dM^{++}, ... was wir blos in der Schichte dM, dM^{+}, dM^{++}, ... durch x, y', y'', y''', ... z', z'', z''', ... dM', dM'', dM''', ... andeuten, so ist, wenn wir, um Integral von Summe zu unterscheiden, ersteres durch $\int$, letzteres durch $\mathfrak{S}$ anzeigen,

$$\int y\,dM = \left(\frac{\overset{+}{\mathfrak{y}}{}'.\,d\overset{+}{M}{}' + \overset{+}{\mathfrak{y}}{}''.\,d\overset{+}{M}{}'' + \overset{+}{\mathfrak{y}}{}'''.\,d\overset{+}{M}{}''' + \ldots}{dM^{+}}\right) d\overset{+}{M} +$$

$$\left(\frac{\overset{++}{\mathfrak{y}}{}'.\,d\overset{++}{M}{}' + \overset{++}{\mathfrak{y}}{}''.\,d\overset{++}{M}{}'' + \overset{++}{\mathfrak{y}}{}'''.\,d\overset{++}{M}{}''' + \ldots}{dM^{++}}\right) d\overset{++}{M} +$$

$$\left(\frac{\overset{+++}{\mathfrak{y}'}.\, d\overset{+++}{M'} + \overset{+++}{\mathfrak{y}''}.\, d\overset{+++}{M''} + \overset{+++}{\mathfrak{y}'''}.\, d\overset{+++}{M'''} + \ldots}{dM^{+++}}\right) d\overset{+++}{M} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder $\int y\, dM = \mathfrak{S}\overset{+}{\mathfrak{y}}\, d\overset{+}{M} + \mathfrak{S}\overset{++}{\mathfrak{y}}\, d\overset{++}{M} + \mathfrak{S}\overset{+++}{\mathfrak{y}}\, d\overset{+++}{M} + \ldots\ldots =$ der Summe aller jener Produkte, welche man erhält, wenn man im ganzen Körper (der $A\mathfrak{X} = x$ entspricht) jedes Körperelement mit seiner senkrechten Entfernung von der Fläche AB multiplizirt. Der Ausdruck $\int y\, dM$ in dem bisherigen Sinne ist folglich dem Ausdrucke $\int y\, dM$ in dem Sinne gleich, wenn man unter dM überhaupt ein körperliches Element des Körpers, unter y seinen senkrechten Abstand, also unter y dM (da dM Gewicht von dM ist) dessen statisches Moment gegen die Fläche AB, unter $\int y\, dM$ die Summe [$\int$ heisst hier blos Summe] der statischen Momente gegen die Ebene AB aller im Körper (welcher $A\mathfrak{X} = x$ entspricht) enthaltenen körperlichen Elemente versteht. Es ist also die Gleichung wahr,

$\int y\, dM = \int y\, dM$, eben so

$\int z\, dM = \int z\, dM$, eben so

$\int xy\, dM = \int xy\, dM$, eben so

$\int xz\, dM = \int xz\, dM$, woselbst in jeder Gleichung $\int$, y, dM, eben so $\int$, z, dM, eben so $\int$, x, y, dM, eben so $\int$, x, z, dM auf der rechten und linken Seite einen verschiedenen Sinn haben, wie aus dem Geiste des eben Gesagten erhellet; so heisst z. B. in der Gleichung $\int xy\, dM = \int xy\, dM$ linker Hand $\int xy\, dM$ das Integral des Ausdrucks xy dM, woselbst $x = A\mathfrak{X}$ ist, dM das Gewicht jener Schichte ist, worum der Körper wächst, wenn x um dx zunimmt, und y der senkrechte Abstand des Schwerpunkts der Schichte dM von der Ebene AB ist; hingegen heisst rechter Hand $\int xy\, dM$ die Summe aller Produkte xy dM, welche man erhält, wenn man im ganzen Körper (welcher $A\mathfrak{X} = x$ entspricht) jedes Körperelement dM mit seinem entsprechenden xy multiplizirt, und alle diese Produkte zusammen addirt; hier heisst also dM allgemein das Gewicht eines Körperelements von 3 unendlich kleinen Dimensionen, y dessen senkrechter Abstand jener auf $A\mathfrak{X}$ senkrechten Schichte vom Punkte A, in welcher Schichte das dM liegt. Legt man den Ausdrücken $\int y\, dM$, $\int z\, dM$, $\int xy\, dM$, $\int xz\, dM$ den Sinn bei, welchen sie in unsern obigen 4 Gleichungen rechter Hand haben, woselbst $\int$ allemal nur eine Summe ausdrückt, so müssen im jedesmaligen Falle erst aus den Bedingnissen der Aufgabe die Werthe dieser Ausdrücke gesucht werden, wozu oft, um blos einen sol-

chen Ausdruck zu bestimmen, mehrmalige Integrationen nebst andern Rechnungsoperationen erforderlich sind.

Ad S. 92. Z. 8. Dieser zweite Absatz des (§. 76.) ist unnütz nach meiner schon gegebenen Erläuterung; er macht fast irre.

Ad S. 93. Z. 16. Bisher wurden die Drucke auf die verschiedenen Punkte der Drehaxe eines rotirenden Körpers betrachtet, welche bloss dem Einflusse der Schwungkräfte der um die Axe laufenden Elemente zuzuschreiben sind; in folgenden Paragraphen sollen hingegen jene Axendrucke bestimmt werden, welche den die beschleunigte Rotation des Körpers bewirkenden Kräften allein zuzuschreiben sind, bis wieder (§. 85.) die Schwungkräfte mit in Rechnung kommen.

Ad S. 95. Z. 4. Man kann auch umgekehrt sagen: Wenn die Unbiegsamen CA, CG, CF (Taf. VII. Fig. 1.) in unbiegsamen Zusammenhange in C mit einander stehen, und C die Axe ist, um welche CA, CG, CF in einer auf dieser Axe senkrechten Ebene sich drehen können, so bleibt der Druck an Richtung und Grösse auf die Axe C dieselbe, ob die Kräfte P, Q, R unmittelbar in C angebracht, nach $C\alpha$, $C\beta$, $C\gamma$ wirken, oder ob P, Q, R, in A, G, F, (nach Ap, Gq, Fr, wirkend) angebracht sind, vorausgesetzt, dass Ap ǂ $C\alpha$, Gq ǂ $C\beta$, Fr ǂ $C\gamma$ laufen, und alle diese Richtungen Ap, Gq, Fr, sich in einerlei Punkt B jener Geraden CN schneiden, welche die Richtung der mittlern in C angebrachten Kräfte P, Q, R ist, auch werden dann P, Q, R in A, G, F angebracht, nach Ap, Gq, Fr wirkend um C im Gleichgewicht seyn.

Ad S. 95. Z. 8. Dieser Satz erhält seine ganze Allgemeinheit erst durch meine zum §. 80. gemachte Anmerkung für den Gegendruck, wenn um der Axe Gleichgewicht durch solche Kräfte besteht, die in verschiedenen auf der Axe senkrechten Ebenen liegen.

Ad S. 95. Z. 17. Suche z. B. bei dieser Rotation um Axe C (Taf. V. Fig. 10.) den Druck, welchen diese Axe C erleidet; $Cg = r$, $Ck = R$. Man denke sich p und P hinweg, in α und β die gleichen Gewichte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}$, in γ ($\alpha\gamma = \gamma\beta$) das Gewicht $2\mathfrak{X}$, so drückt durch die in α, β, γ angebrachten Gewichte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$, $-2\mathfrak{X}$ die unbiegsame Gerade gk in keinen ihrer Punkte also auch nicht in C herab, es möge $\mathfrak{X}$ was immer für einen Werth haben. Nun nehme man $\mathfrak{X}$ so gross an, dass P in k, — p in g, $\mathfrak{X}$ in β, $\mathfrak{X}$ in α, $-2\mathfrak{X}$ in γ einander das Gleichgewicht halten (wozu der Werth von $\mathfrak{X}$ so gefunden wird:

$$P.R + C\beta.\mathfrak{X} + p.r + C\gamma.2\mathfrak{X} = C\alpha.\mathfrak{X}, \text{ also } \mathfrak{X} = \frac{P.R + p.r}{C\alpha - C\beta - 2C\gamma},$$

so ist der Druck auf die Axe C derselbe, ob in α, β, γ die Gewichte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$, $-2\mathfrak{X}$ bestehen, oder nicht, aber der Druck auf der Axe C bei bestehenden Gewichten P, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$, $-$ p, $-2\mathfrak{X}$ in k, β, α, g, γ ist $= P - p + \mathfrak{X} + \mathfrak{X} - 2\mathfrak{X} = P - p$, also ist auch der Druck auf Axe C dann $= P - p$, wenn in α, β, γ die Gewichte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$, $-2\mathfrak{X}$ nicht bestehen, also um C eine beschleunigte Rotation vor sich geht.

Ad S. 95. Z. 18. Ehe die folgenden Paragraphe vorgetragen werden, muss ich bemerken, das hier das Zeichen $\int$ eben nicht einmalige Integration bedeute, sondern überhaupt nur eine Summe andeute, welche dann nach Maassgabe der jedesmaligen Umstände durch einmaliges oder mehrfaches Integriren erhalten werden kann; so heisst z. B. $\int r\,dM$ die Summe aller Produkte (in der um C sich drehenden Ebene DCED (Fig. 20.)) der Elemente dieser Ebene in deren Abstände von C, welches nur durch zweimalige Integration erhalten werden kann; denn betrachtet man nur einen Elementarstreifen dieser Ebene, so giebt eine Integration erst die Summe der Produkte aus den unendlich kleinen Theilen dieses Streifens in deren Abstände von C, dieser Ausdruck integrirt dann erst die Summe der Produkte dM heisst hier allemal das Gewicht eines Elementartheils von unendlich-kleiner Länge und Breite, und M das Gewicht der ganzen Ebene. In demselben Sinne als $\int r\,dM$ ist auch $\int rr\,dM$ zu nehmen, eben so $\int x\,dM$, $\int y\,dM$, $\int xx\,dM$, $\int yy\,dM$. Wem die Theorie des Schwerpunkts bekannt ist, der begreift leicht, dass $\frac{\int y\,dM}{M}$ der Abstand des Schwerpunkts der Ebene DCED von DC, und $\frac{\int x\,dM}{M}$ jener des Schwerpunkts der Ebene DCED von CE sey.

Ad S. 97. Z. 22. Hieraus lässt sich folgender wichtiger Satz aufstellen, welcher das (§. 18.) S. 95. Z. 6—9 Gesagte ergänzt: Wenn Kräfte, die in mehreren auf der Axe AB senkrechten mathematischen Ebenen liegen, unter einander um AB im Gleichgewichte sind, so ist der Druck auf allen Punkten der Axe als ob sie unmittelbar so angebracht wären, dass jede Kraft in ihrer parallelen Lage und mit unveränderter Grösse jenen Punkt der Axe ergreifen möchte, wo die senkrechte Ebene, in welcher die Kraft liegt, die Axe schneidet. Diess beweise ich so: seyen z. B. zwei auf der Axe AB senkrechte mathematische Ebenen (ohne Masse, blos unbeugsame Ebenen) hinter einander $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, und man habe die in diesen Ebenen liegenden, um AB im Gleichgewichte stehenden Kräfte P, Q, R P′, Q′, R′, ... auf die (der Richtung und Grösse nach) in allem Betrachte gleichgeltenden V und V′ (V in $\mathfrak{E}$, V′ in $\mathfrak{E}'$, eben so P, Q, R, ... in $\mathfrak{E}$, P′, Q′, R′ in $\mathfrak{E}'$) reduzirt, so wird sowohl am Gleichgewichte

als am Drucke auf die verschiedenen Punkte der Axen nichts geändert, wenn man die beiden mathematischen Ebenen in physische Ebenen (die mit ihrem Gewicht auf die Axe keinen Druck ausüben, wenn sie z. B. horizontal und die Axe senkrecht auf den Horizont gedacht werden) verwandelt, deren Schwerpunkte in jene Punkte fallen, wo diese Ebenen die Axe AB schneiden; dann ist aber (§. 80.) der Druck auf den Durchschnittspunkt C von AB und 𝔈 derselbe, als ob man V an C in seiner parallelen Lage anbrächte, eben so ist es im Durchschnittspunkt C′ von AB und 𝔈′, also ist der Druck auf AB in unserm Falle derselbe, als ob unmittelbar in C die Kraft V in ihrer parallelen Lage, und unmittelbar in C′ die Kraft V′ in ihrer parallelen Lage angebracht wären, folglich auch als ob unmittelbar in C die Kräfte P, Q, R, ... in ihren parallelen Lagen, und unmittelbar in C′ die Kräfte P′, Q′, R′, ... in ihren parallelen Lagen angebracht wären.

Ad S. 98. Z. 11. Um das hier vom *Centro oscillationis* Gesagte zu verstehen, will ich ganz kurz diesen Gegenstand berühren. Seyen in dieser Figur P, Q, R, (Taf. VI. Fig. 2.) Gewichte welche mit einander in unbiegsamen Zusammenhange stehen, und als ein solches System von schwerer Masse um die Axe C gedreht werden können. Sey CN auf den Horizont senkrecht, so wird das System in der hier gezeichneten Lage eine beschleunigte Winkelgeschwindigkeit haben. Sey $Cd = Cl = 1$, $P' = P \sin \pi$, $Q' = Q \sin \gamma$, $R' = R \sin \varrho$, in $\varrho = P'.\ p$, in $\mathfrak{g} = Q'q$, in $\mathfrak{r} = R'r$, $Pp' + Q'r + Q'q$ in drei Theile, woselbst wirken blos auf P x

. . . . Q y

. . . . Q P′p +

$Q'q + R'r - x - y$; werde an Winkelgeschwindigkeit von P, Q, R binnen dt genommen dw, dw', dw'' $\left[dw = \frac{dv}{p},\ dw' = \frac{dv'}{q},\ dw'' = \frac{dv''}{r},\ C dv = g.\ \frac{x}{pP}\, dt,\ dv' = g.\ \frac{y.\ dt}{q.\ Q} \right]$ $dv'' = g.\ \frac{(P'p + Q'q + R'r - x - y)}{r.\ R}$, also $\frac{x}{p^2 P} = \frac{y}{q^2 Q}$, $y = \frac{q^2 Q}{p^2 P}$, $\frac{y}{q^2 Q} = \frac{(P'p + Q'q + R'r - x - y)}{r^2 R}$, $\frac{y}{q^2 Q} = \frac{q^2 Q}{p^2 P} . \frac{x}{q^2 Q} = \frac{x}{p^2 P} =$

$$\frac{\left(P'p + Q'q + R'r - x - \frac{q^2 Q}{p^2 P}\, x\right)}{r^2 R} = P'p.\ p^2 P + Q'q.\ p^2 P + R'r.\ p^2 P$$

$$x = \frac{p^2 P\,(P'p + Q'q + R'r)}{p^2 P + q^2 Q + r^2 R}, \text{ also } dw = \frac{dv}{p} = \frac{g x dt}{p^2 P}, \; dw =$$

$$g dt \frac{(P'p + Q'q + R'r)}{p^2 P + q^2 Q + r^2 R} = \frac{g dt\,(p.\,P \sin\pi + g.\,Q \sin\gamma + r.\,R \sin\varrho)}{p^2 P + q^2 Q + r^2 R};$$

Sey in g Schwerpunkt von P, Q, R, so ist

$$C'g = \frac{P.\,p \sin\pi + Q.\,q \sin\gamma + R.\,r \sin\varrho}{P + Q + R}, \; Cg = \frac{P.\,p \cos\pi + Q.\,q \cos\gamma + R.\,r \cos\varrho}{P + Q + R}.$$

Sey in der Ch in einem Punkte z konzentrirt das Gewicht P + Q + R, Cz = z, wie gross muss z seyn, wenn z mit derselben Winkelgeschwindigkeit laufen soll als die Massen P, Q, R, in obiger Figur, d. h. wenn z mit P, Q, R isochronisch schwingen soll? Das geschieht wenn z binnen dt an Winkelgeschwindigkeit dW dann dasselbe gewinnt als P, Q, R, wenn Cz mit CC′ gerade Winkel bildet, wobei P, Q, R mit CC′ die Winkel π, γ, ϱ bilden, da π, γ, ϱ, allgemein jede Lage des Systems P, Q, R bestimmen. Nun ist dieses

$$dW = \frac{dV}{z} = \frac{g.\,dt\,(P.\,p \sin\pi + Q.\,q \sin\gamma + R.\,r \sin\varrho)}{z\,(P + Q + R)\,Cg} \text{ da } Cg : Cg' = P + Q + R : zm,$$

$$\text{also } zm = (P + Q + R)\frac{Cg'}{Cg} = \frac{(P.\,p \sin\pi + Q.\,q \sin\gamma + R.\,r \sin\varrho)}{Cg}, \text{ also muss seyn}$$

$$\frac{1}{z.\,Cg\,(P + Q + R)} = \frac{1}{p^2 P + q^2 Q + r^2 R}, \text{ also}$$

$$z.\,Cg\,(P + Q + R) = p^2 P + q^2 Q + r^2 R, \; z = \frac{p^2 P + q^2 Q + r^2 R}{(P + Q + R)\,Cg}.$$

Hier ist z das *Centrum oscillationis*, oder Mittelpunkt des Schwunges oder der Schwingungspunkt des Systems vom Gewichte P, Q, R, das um C schwingt. Die Entfernung dieses Schwingungspunktes von der Umdrehungsaxe ist allemal gleich der Summe der Trägheitsmomente der Gewichte P, Q, R, um C, getheilt durch das Produkt aus der Entfernung Cg des gemeinschaftlichen Schwerpunkts der Gewichte P, Q, R, von der Drehaxe C in die Summe dieser Gewichte.

Warum Herr Schubert $Cg.\,M = \int r\,dM$ setzt, ist nicht begreiflich, da doch nicht $(P + Q + R)\,Cg = P.\,CP + Q.\,CQ + R.\,CR$ gesetzt werden kann. (Dieser Gegenstand ist sehr schön abgehandelt in Eulers unsterblichem Werke: *de motu corporum solidorum seu rigidorum.*)

Ad S. 98. Z. 23. Es ist $\frac{V}{M}$ die beschleunigende Kraft, welche blos in g angenommen, dieselbe beschleunigte Rotation der Linie Cg um C bewirkt, als bei der Fläche CEDC durch die Kraft V um C hier wirklich Statt findet, wenn CV = $f = \frac{\int rrdM}{Cg.M}$ ist; laufe CV durch g oder nicht, sey also C eine freie Axe oder nicht, denn man kann, ohne den Fall zu ändern, annehmen; es bestehe statt V in V nach Vv eine Kraft $\frac{f.V}{Cg}$ in g senkrecht auf Cg, ferner wird die Beschleunigung der Cg um C nicht geändert, ob man annimmt, es sey die ganze Masse in g eine Masse $= \frac{\int rrdM}{Cg^2}$ konzentrirt, welches sogleich bewiesen werden soll, in welchem letztern Falle die in g bestehende beschleunigende Kraft, wodurch Rotationsbeschleunigung wirklich Statt findet, $= \frac{f.V}{Cg} \cdot \frac{Cg^2}{\int rrdM} = \frac{f.V.Cg}{\int rrdM} = \frac{\int rrdM.V.Cg}{cg.M\int rrdM} = \frac{V}{M}$ ist. Das zu beweisen zeige ich so: (Taf. VI. Fig. 3.) Die Gewichte P, Q, R (blos als träge Massen wirkend) welche unter einander in unbiegsamen Zusammenhange stehen, werden durch die Kraft K um die Axe C in Rotation gesetzt, so sey K = x + y + K − x − y, woselbst x blos P, y blos Q, K — x — y blos R beschleunigt, also sind in P, Q, R die beschleunigenden Kräfte nach den Tangenten der Kreise um C $= \frac{x.c}{p.P}, \frac{yk}{q.Q}, (K - x - y)\frac{k}{r.R}$, also in P, Q, R, $dv = 2g\,dt.\frac{x.k}{pP}$, $dv' = 2g\,dt.\frac{yk}{qQ}$, $dv'' = 2g\,dt.\frac{x.k}{p^2.P}$, $dw' = 2g\,dt.\frac{y.k}{q^2Q}$, $dw'' = 2g\,dt\,(K - x - y)\frac{k}{r^2R}$.

Nun ist $dw = dw' = dw''$ oder $\frac{x}{p^2P} = \frac{y}{q^2Q}$, und $\frac{y}{q^2Q} = \frac{K - x - y}{r^2R}$, also $y = \frac{q^2Q.x}{p^2P}$, und $\frac{x}{p^2P} = \frac{K - x - \frac{q^2Qx}{p^2P}}{r^2R}$ oder $x = \frac{K.p^2.P}{p^2P + q^2Q + r^2R}$, also $dw = 2g\,dt\,\frac{k.K}{(p^2P + q^2Q + r^2R)}$, soll nun eine

Z in K durch K so beschleunigt werden, wie P, Q, R in P, Q, R, so muss seyn $2g\ dt.\ \frac{K}{ZK} = dw$ oder $Z = \frac{p^2P + q^2Q + r^2R}{k^2}$. In einem solchen Falle heisst Z die gleichgeltende oder *equivalente* Masse von P, Q, R, und p^2P, q^2Q, r^2R sind die Momente der Trägheit der Massen P, Q, R um C.

Ad S. 99. Z. 6. Es ist hier auch $r d\varphi = \frac{gp}{dM}\ dt^2$, also $p = \frac{r d\varphi dM}{g dt^2}$, also $r.\ p = \frac{d\varphi}{g\ d\ t^2}.\ r^2\ dM$ und die Summe aller r.p im ganzen Körper um der Drehaxe $= \frac{d\varphi}{gdt}\ r^2.\ dM' + \frac{d\varphi}{gdt^2} r''^2 dM'' + \frac{d\varphi}{gdt^2}\ r'''^2 dM''' + \ldots\ldots =$ $\frac{d\varphi}{g\ dt^2} \int r^2\ dM$, woselbst $\int rdM$ die Summe aller statischen Momente der Elementartangentialkräfte im ganzen Körper um die Umdrehungsaxe bedeutet, welche im jedesmaligen Falle zu suchen eine eigene Aufgabe ist. p ist die Elementarkraft an jedem Elementarpunkte des Körpers in der senkrechten Entfernung r von der Drehaxe, welche Kraft nach der Tangente jenes Kreises wirkt, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der Drehaxe mit der Linie r und dessen *radius* = r ist, wobei angenommen wird, dass die Summe aller rp = f. V ist, wodurch alle mit V um der Drehaxe im Gleichgewicht stehen, ohne dass jedoch die Elementarkräfte p auf die Drehaxe einen eigenen Druck ausüben können. Aus: $\frac{d\varphi}{g\ dt^2} \int rrdM = f.\ V$ folgt, wenn Cg die von der Drehaxe senkrechte Entfernung des körperlichen Schwerpunkts g bedeutet, dass die gleichgeltende Masse in g konzentrirt $= \frac{\int rrdM}{Cg^2}$ sey, und dass V im senkrechten Abstande f von der Drehaxe dasselbe bewirkt als $\frac{f.\ V}{Cg}$ in der senkrechten Entfernung von derselben Drehaxe. Nimmt man aber in g die Masse $\frac{\int rrdM}{Cg^2}$ konzentrirt, und daselbst die um der Drehaxe wirkende Tangentialkraft $\frac{f.\ V}{Cg}$ an, so ist die beschleunigende Kraft in g nach der Tangente des Kreises vom Radius Cg um der Drehaxe = $\frac{f.\ V.\ Cg}{\int rrdM} = \frac{Cg}{\int rrdM}.\ \frac{d\varphi}{g.\ dt^2}.\ \int rrdM = \frac{Cg.\ d\varphi}{g.\ dt^2}$, also dv =

$2g. \frac{Cg.d\varphi}{g.dt^2} dt$ und $d\vartheta = \frac{2d\varphi}{dt}$. Hier bedeutet $d\varphi$ den Bogen *pro radio* $= 1$ der um die Drehaxe durchlaufen würde binnen dt, entweder blos durch die Wirkung der Kraft γ, in der senkrechten Entfernung von der Drehaxe wirkend, oder blos durch die Wirkung jeder Elementarkraft p auf ihr Element, wenn auch alle Elemente unter einander nicht zusammenhängen möchten, $d\vartheta$ ist der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit in dem einen oder andern Falle. Dass bei der blossen Wirkung von V auch $d\vartheta = \frac{2d\varphi}{dt}$ sey, folgt [(Astr. §. 16.) da dort gezeigt wird, $ds = v dt$, $dds = dv.\,dt$, $dv = \frac{dds}{dt} = \frac{\frac{2dds}{2}}{dt}$, wo dv der in Zeit dt genommene Zuwachs an Endesgeschwindigkeit eines Punkts und ds der in dt von demselben Punkte durchlaufene Raum, also $\frac{dds}{2}$ der Raum ist, den dieser Punkt blos allein durch seine beschleunigte Bewegung nicht nach seiner Trägheit durchläuft] daraus, dass $d\vartheta$ und $d\varphi$ sich auf einerlei nach einem steten Gesetze beschleunigten Punkt beziehen, und $d\vartheta$ dessen Zuwachs an Endesgeschwindigkeit binnen dt, ferner $d\varphi$ dessen binnen dt durchlaufener Raum blos durch die beschleunigte Bewegung nicht nach dessen Trägheit ist.

Ad S. 99. Z. 17. Um diesen §. 81. wohl zu begreifen ist folgendes zu bemerken: Ist (Taf. VII. Fig. 2.) AB die Axe, worum sich der Körper 𝔄𝔅 𝔇𝔈 dreht, ℌℑ𝔎𝔏 eine durch AB gelegte Ebene (die, fest im Körper sich mit selbigem um AB dreht) XY = y in der Ebene ℌℑ𝔎𝔏 bis zum Elemente Z gezogen, die Hypotenuse YX = r, p die Elementarkraft vom Elemente Z dessen Masse = dM ist, welches p senkrecht auf r wirkt, q und u die Seitenkräfte nach YX und YZ (parallel und senkrecht zur Ebene ℌℑ𝔎𝔏) der Kraft p. Denken wir uns ferner durch AB eine auf ℌℑ𝔎𝔏 senkrecht gelegte Ebene 𝔈, so wird an dem vorliegenden Falle nichts geändert, wenn wir uns die Kräfte q aller Elemente dM die Ebene 𝔈 in jenen Punkten ergreifend denken, wo die Richtungen q die Ebene 𝔈 senkrecht schneiden, da alle Punkte einer Geraden unbiegsamen α ———— γ ———— β, $\alpha\beta$ denselben Druck nach $\alpha\beta$ erleiden, ob eine Kraft q, nach $\alpha\beta$ wirkend, die $\alpha\beta$ in α oder β oder γ ergreift; eben so ist nichts verändert, wenn wir uns alle u die Ebene

ℌ𝔍𝔎𝔏 in jenen Punkten ergreifend vorstellen, wo die Richtungen dieser Kräfte u die Ebene ℌ𝔍𝔎𝔏 schneiden. Die Summe aller q ist $= \int \gamma$, jene aller u $= \int u$, die Summe aller statischen Momente der Kräfte q in Bezug auf die Axe AB $= \int y . u$. Diese statischen Momente beziehen sich auf Rotation des Körpers um die Axe AB mittelst der Elementarkräfte p. Die die Ebene 𝔈 ergreifenden darauf senkrecht wirkenden Kräfte q können aber auch eine Rotation des Körpers um eine auf ℌ𝔍𝔎𝔏 senkrechte Axe bewirken; die Summe der statischen Momente dieser Kräfte q in Bezug der Rotation um eine auf ℌ𝔍𝔎𝔏 senkrechte Axe, die in einer die Axe AB in A senkrecht schneidenden Ebene CAD liegt, ist $= \int x . q$. Die die Ebene ℌ𝔍𝔎𝔏 ergreifenden darauf senkrecht wirkenden Kräfte u können eine Rotation des Körpers um eine auf 𝔈 senkrechte Axe bewirken. Die Summe der statischen Momente dieser Kräfte u in Bezug der Rotation um eine auf 𝔈 senkrechte Axe, die in einer die Axe AB in A senkrecht schneidenden Ebene CAD liegt, ist $= \int x . u$.

Ad S. 101. Z. 11. Der Ausdruck senkrecht auf der Axe heisst hier: in einer auf der Axe senkrechten Ebene liegend; die in der auf der Axe senkrechten Ebene liegende Kraft, liesse sich (was aber hier nicht nothwendig ist) in eine auf die Axe senkrechte und in eine nach der Tangente des Kreises um die Axe zersetzen, wie (Astr. §. 77.) gezeigt wurde.

Ad S. 101. Z. 37. Um das in diesem §. 82. Gesagte wohl zu verstehen, mag folgende Anwendung dienen: Dieser Körper werde um die Axe AB (Taf. VI. Fig. 4.) rotatorisch beschleunigt; 𝔄𝔅, 𝔇𝔈, 𝔍𝔎, seyen 3 auf AB senkrechte Ebenen, welche binnen dt durch die Kräfte $\overset{+}{K}$, $\overset{++}{K}$, $\overset{+++}{K}$, von 𝔐, 𝔑, 𝔖, in Entfernungen $\overset{+}{a}$, $\overset{++}{a}$, $\overset{+++}{a}$ ergriffen sind, die nicht in den Ebenen 𝔄𝔅, 𝔇𝔈, 𝔍𝔎 liegen und auch nicht senkrecht auf selbigen stehen; werden nun $\overset{+}{K}$ $\overset{++}{K}$ $\overset{+++}{K}$ zerlegt, nemlich jede derselben in eine mit AB parallele $\overset{+}{X}$, $\overset{++}{X}$, $\overset{+++}{X}$, und eine in der entsprechenden Ebene liegende $\overset{+}{V}$, $\overset{++}{V}$, $\overset{+++}{V}$, so lassen sich die in A und B auf AB senkrechten Drucke, und jene Drucke, womit AB nach AB drückt, folgendermaassen finden. Dieses alles ist nur für jenes dt wahr, wo die hier angenommnnen Bedingnisse eintreten; ferner sind hier jene Axendrücke noch nicht mit in Rechnung genommen, welche binnen diesem dt blos allein durch die Schwungkräfte der um AB laufenden Elemente des Körpers entstehen (§. 73, ...).

Seyen die senkrechten Abstände der $\overset{+}{V}$, $\overset{++}{V}$, $\overset{+++}{V}$, von 𝔐, 𝔑, 𝔊 = $\overset{+}{f}$, $\overset{++}{f}$, $\overset{+++}{f}$, und sey $\overset{+}{f}.\overset{+}{V} + \overset{++}{f}.\overset{++}{V} + \overset{+++}{f}.\overset{+++}{V} = f.V$; denken wir uns ferner durch AB eine Ebene 𝔈, worin (wie Fig. 21.) die Abscissen x auf AB und die auf AB senkrechten Ordinaten y liegen, dann durch AB eine Ebene 𝔈′ auf jener 𝔈 senkrecht, geben Q und R dieselben Bedeutungen als (Fig. 21.); und nennen E, F, die Durchschnittspunkte der durch Q, R auf AB senkrecht gelegten Ebenen mit AB. Nun übertragen wir folgende Kräfte parallel zu sich selbst unmittelbar an die Axe AB, nemlich: $\overset{+}{V}$ nach 𝔐, $\overset{++}{V}$ nach 𝔑, $\overset{+++}{V}$ nach 𝔊; ferner Q nach E, R nach F, legen durch $\overset{+}{X}$, $\overset{++}{X}$, $\overset{+++}{X}$ und AB die Ebene $\overset{+}{𝔈}$, $\overset{++}{𝔈}$, $\overset{+++}{𝔈}$, bringen unmittelbar in A und B senkrecht auf AB in den Ebenen $\overset{+}{𝔈}$, $\overset{++}{𝔈}$, $\overset{+++}{𝔈}$ die Drucke (§. 77.) $\frac{\overset{+}{a}.\overset{+}{X}}{AB}$, $\frac{\overset{++}{a}.\overset{++}{X}}{AB}$, $\frac{\overset{+++}{a}.\overset{+++}{X}}{AB}$ an, und in B nach AB den Druck nach $AB = \overset{+}{X} + \overset{++}{X} + \overset{+++}{X}$, so liegen in den durch A und B auf AB senkrecht gelegten Ebenen A′, B′ folgende von A und B strahlenförmig auslaufende Drucke (deren Richtungen aus ersten Grundsätzen der Statik leicht zu erachten sind) in A′ folgende:

$$\overset{+}{V}.\frac{B𝔐}{AB},\ \overset{++}{V}.\frac{B𝔑}{AB},\ \overset{+++}{V}.\frac{B𝔊}{AB},\ Q.\frac{BE}{AB} =$$

$$\frac{f.V}{AB.\int rrdM}.\int(a-x)\,zdM,\ R.\frac{BF}{AB} =$$

$$\frac{f.V}{AB\int rrdM}\int(a-x)\,ydM,\ \frac{\overset{+}{a}.\overset{+}{X}}{AB},\ \frac{\overset{++}{a}.\overset{++}{X}}{AB},\ \frac{\overset{+++}{a}.\overset{+++}{X}}{AB};$$ in B′ folgende: $$\overset{+}{V}.\frac{A𝔐}{AB},\ \overset{++}{V}.\frac{A𝔑}{AB},\ \overset{+++}{V}.\frac{A𝔊}{AB},\ Q.\frac{AE}{AB} =$$

$$\frac{f.V}{AB.\int rrdM}\int xzdM,\ \frac{R.AF}{AB} =$$

$$\frac{f.V}{AB.\int rrdM}\int xydM,\ \frac{\overset{+}{a}.\overset{+}{X}}{AB},\ \frac{\overset{++}{a}.\overset{++}{X}}{AB},\ \frac{\overset{+++}{a}.\overset{+++}{X}}{AB}.$$ Gesetzt nun, alle in A′ liegenden Drucke geben den mittlern Druck 𝔄, jene in B′ den mittlern Druck = 𝔅 [𝔄, 𝔅, der Richtung und Grösse nach durch Linien (in A′ und B′ von A und

B aus gezogen) bestimmt], so ist binnen dt der Axen-Druck, senkrecht auf AB in A = 𝔄, in B = 𝔅, aber nach AB in B oder A = $\overset{+}{X} + \overset{++}{X} + \overset{+++}{X}$.

Ad S. 102. Z. 13. Hier ist folgendes zu bemerken. Wird blos AB betrachtet, und nimmt man AB als physische Linie von durchaus gleicher Dicke und Dichtigkeit an, so werden zwei in A und B auf AB senkrecht wirkende in einerlei Ebene liegende gleich grosse Kräfte die AB um ihren Mittelpunkt rotatorisch beschleunigen; denn sagte man es werde diese Rotation A————$\underset{m}{,}$————————B um m erfolgen, so liesse sich allemal einwenden, warum soll gerade Am kleiner als Bm seyn? Wird hingegen ein Körper (Fig. 21.), durch welchen man sich eine Axe AB denkt, binnen dt in A und B von zwei Kräften α und β ergriffen, welche auf AB senkrecht wirken und in einerlei Ebene liegen, so wird binnen dt die Rotation nicht eben um den Mittelpunkt von AB erfolgen müssen.

Ad S. 103. Z. 4. Das folgt hieraus: Es ist (Fig. 21.) die Schwungkraft des Elements Z oder dM = $\frac{\vartheta\vartheta}{2g}$. X. Z. dM (§. 73.) = $\frac{\vartheta\vartheta}{2g}$. r. dM, welcher Druck nach XZ sich äussert, folglich nach XZ und YZ (wie mit Q und R parallel) in $\frac{\vartheta\vartheta}{2g}$ y dM und $\frac{\vartheta\vartheta}{2g}$ z dM zersetzt werden kann; da nun ϑ bei allen Elementen einerlei Werth hat, so ist die Summe der Drucke aller Elemente durch deren Schwungkräfte: nach XY = $\frac{\vartheta\vartheta}{2g} \int y\,dM$, nach YZ = $\frac{\vartheta\vartheta}{2g} \int z\,dM$, wo $\int$ wieder nichts anders als Summe bedeutet.) Legt man (Fig. 16., welche mit Fig. 21. völlig homogen ist) durch den Konzentrirungspunkt aller $\frac{\vartheta\vartheta}{2g}$ y dM und durch jenen aller $\frac{\vartheta\vartheta}{2g}$ z dM auf AB senkrechte Ebenen, welche AB in E und I schneiden, so ist:

$AE = e = \dfrac{\dfrac{88}{2g}\int xydM}{\dfrac{88}{2g}\int ydM}$ und $AI = h = \dfrac{\dfrac{88}{2g}\int xydM}{\dfrac{88}{2g}\int zdM}$. Da nun $\frac{88}{2g} \int ydM$ und $\frac{88}{2g} \int zdM$ um AB keine Rotation bewirkt (indem die Schwungkraft jedes dM senkrecht auf der Axe drückt) also $\frac{88}{2g} \int ydM$ und $\frac{88}{2g} \int zdM$ um AB in Gleichgewicht stehen, so findet man die Drucke senkrecht auf AB, welche $\frac{88}{2g} \int ydM$ und $\frac{88}{2g} \int zdM$ ausüben, wenn man (§. 78.), und meiner zu §. 80. gemachten Anmerkung) Fig. 16. in E und I die Drucke $\frac{88}{2g} \int ydM$ und $\frac{88}{2g} \int zdM$ nach den Richtungen XY und YZ mit Q und R (Fig. 21.) parallel anbringt, welche in A und B nach den entsprechenden Richtungen die auf AB senkrechten Drucke geben, und zwar (Fig. 16.) in A $= \frac{(a - e)}{a} \frac{88}{2g} \int ydM$ und $= \frac{(a - h)}{a} \int zdM$, in B $= \frac{e}{a} \frac{88}{2g} \int ydM$ und $= \frac{h.}{a} \frac{88}{2g} \int zdM$. (E und E in Fig. 16 und 21. sind verschiedene Punkte.)

Nun ist:

$$\left(\frac{a - e}{a}\right) \frac{88}{2g} \int ydM = \left(a - \frac{\int xydM}{\int ydM}\right) \frac{88}{2ag} \int ydM =$$

$(a \int ydM - \int xydM) \frac{88}{2ag} = \frac{88}{2ag} \int (a - x)\, ydM$ [wie ich schon (§. 82.) bewiesen habe.] u. s. w.

Ad S. 103. Z. 16. Eigentlich ist allgemein statt A — m zu setzen A + m, eben so statt B — n zu setzen B + n und dahin zu verstehen, dass A und m nur dann verschiedene Zeichen bekommen, und eben so B und n, wenn aus den Bedingnissen der Aufgabe A und m eben so B und n einander entgegengesetzt sind, wie

z. B. in den Figuren 16 und 21. willkürlich angenommen wurde, woselbst die Richtung Qq als die positive und EF (Fig. 16.) als die negative gilt. Eben so können α und μ, dann β und γ entgegengesetzte Zeichen haben, welches in den Figuren 21. und 16 nicht Statt findet, da Rr und IK beide positiv sind. Diese Bemerkung ist in jeder einzelnen Aufgabe wohl zu beherzigen, da die Figuren 21 und 16. nur ein einzelnes Beispiel liefern.

Ad S. 104. Z. 5. Es ist nemlich hier folgendermaassen zu raisoniren: Heissen die in den auf AB senkrechten Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$. liegenden Drucke (binnen Zeit dt) $=$ W, W', W'', ... und deren senkrechte Abstände von AB $=$ w, w', w'', ... so ist dieser Fall mit jenem gleichgeltend, wo statt W, W', W'' in den Abständen w, w', w'', ... in denselben Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... bestünden die Drucke $\frac{W.w}{f}$, $\frac{W'.w'}{f}$, $\frac{W''.w''}{f}$ in den senkrechten Abständen f = f = f = ... von AB; auch wird an dem Falle nichts geändert, wenn man statt $\frac{W.w}{f}$, $\frac{W'.w'}{f}$, $\frac{W''.w''}{f}$ die alle als einerlei (mit AB parallele) Linie ergreifend gedacht werden können, in deren Schwerpunkte (welcher in dieser Linie liegt) eine einzige Kraft $\frac{W.w}{f} + \frac{W'.w'}{f} + \frac{W''.w''}{f} + \ldots$ $=$ V annimmt. Ist nun ϑ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um AB zu Ende der Zeit t, so ist dϑ der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit, welchen der Körper blos durch den im Abstande f wirkenden Tangentialdruck V erhält. Denken wir uns eine auf AB senkrechte Ebene durch den Körper gelegt, nennen μ den hiedurch vom Körper abgeschnittenen Theil, folglich dμ jenen abgeschnittenen Theil, worum μ dadurch wächst, dass die Ebene zu sich parallel unendlich wenig weiter fort geschoben wird; stellen wir uns ferner vor, es sey V an der ganzen von AB um f entfernten mit AB parallelen Linie dergestalt vertheilt, dass der in jedem Punkte dieser Linie angebrachte Krafttheil blos jene auf AB senkrechte physische Ebene um AB beschleunigt, welche er unmittelbar ergreift, nennen wir ferner X die Summe jener Krafttheile, welche alle auf AB senkrechten physischen Ebenen (in die wir uns μ abgetheilt vorstellen) beschleunigen, folglich dX jenen Krafttheil, welcher blos dμ um AB binnen dt beschleunigt, so ist folgendes richtig: Sey r^2dM das Trägheitsmoment jedes Elements in dμ zur Axe AB, also $\int r^2$dM deren Summe, so ist es für die Beschleunigung von dμ dasselbe, ob alle Massen dM in ihren Standpunkten oder

statt derselben blos die Masse $\frac{\int r^2 dM}{f^2}$ im Angriffspunkte von dX bestehen, die beschleunigende Kraft dieses Angriffspunkts ist also binnen $dt = \frac{dX.\,f.\,f}{\int rrdM}$, daher $\int d\vartheta = 2g\,dt.\frac{dX.\,f.\,f}{\int rrdM}$, oder $d\vartheta = 2g\,dt\,\frac{dXf}{\int rrdM}$. Was hier von der Schichte $d\mu$ gesagt wurde, gilt im ganzen Theile μ von allen Schichten $d\mu'$, $d\mu''$ $d\mu'''$, ... bei denen wir dX und $\int rrdM$ durch dX', $(\int rrdM)'$ durch dX'', $(\int rrdM)''$, durch dX''', $(\int rrdM)'''$, ... bezeichnen wollen; bei allen $d\mu$ sind ferner $d\vartheta$, dt, g, f, beständige Grössen, also ist $dX = \frac{d\vartheta \int rrdM}{2gfdt}$, $dX' = \frac{d\vartheta\,(\int rrdM)'}{2gfdt}$, $dX'' = \frac{d\vartheta\,(\int rrdM)''}{2gfdt}$, $dX''' = \frac{d\vartheta\,(\int rrdM)'''}{2gfdt}$, ... also $dX + dX' + dX'' + dX''' + \ldots\ldots =$

$$\frac{d\vartheta}{2gfdt}\left(\int rrdM + (\int rrdM)' + (\int rrdM)'' + (\int rrdM)''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

bezieht sich also diese Gleichung auf alle $d\mu$ und entsprechenden dX in dem ganzen Theile μ, so ist $X = \frac{d\vartheta}{2gfdt}\int rrdM$, wo $\int rrdM$ nicht die bisherige eingeschränkte Bedeutung hat, sondern die Summe der Trägheitsmomente um AB aller im Theile μ enthaltenen Elemente ausdrückt; bezieht sich μ auf den ganzen Körper, so ist $X = V$, also $V = \frac{d\vartheta}{2gfdt}\int rrdM$, wo $\int rrdM$ die Summe der Trägheitsmomente um AB aller im ganzen Körper enthaltenen Elemente ausdrückt; es folgt aber aus letzter Gleichung $d\vartheta = \frac{2gf.\,dt.\,V}{\int rrdM}$, woselbst alle Buchstaben dieselbe Bedeutung haben als im (§. 84. S. 104. Z. 5.). Man wird mir hier einwenden, dass ich einen aus der Statik ohnehin bekannten Satz auf einem ausgesucht komplizirten Wege bewiesen habe; allein darauf antworte ich, dass in den wenigsten Lehrbüchern der Mechanik genugsam erwiesen wird, dass für die Rotation eines Körpers um eine Axe, wie bei der Rotation einer physischen Ebene um eine auf ihr senkrechte Axe, die ganze Beschleunigung der Rotation blos von der Summe der Trägheitsmomente

aller Elemente und vom statischen Momente abhänge, und ich doch wünsche, allen Schülern der höhern Mathematik durch dieses Werk Genüge zu leisten.

Ad S. 104. Z. 10. Es ist sehr wichtig, und für Anfänger in der höhern Analyse nicht leicht, den eigentlichen Sinn der im jedesmaligen Falle vorkommenden Gleichung:

$$\int \vartheta \, d\vartheta = \int \frac{2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM} \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta^2}{2} = \int \frac{2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM}$$

wohl einzusehen.

Vor allen ist zu merken, dass das Zeichen $\int$ hier zweierlei Bedeutungen hat; jenes das vor $\vartheta d\vartheta$ und vor $\frac{2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM}$ steht, hat die in der Integralrechnung angenommene Bedeutung; es heisst nemlich $\int \vartheta d\vartheta$ jene Funktion, welche differenzirt gibt $\vartheta d\vartheta$, und $\int \frac{2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM}$ jene Funktion, welche differenzirt gibt $\frac{2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM}$; in $\int r r \, dM$ heisst aber $\int$ nichts anders als Summe, es ist nemlich $\int r r \, dM$ die Summe der Trägheitsmomente aller Elemente oder physischer Punkte im ganzen Körper in Bezug auf AB. Ferner ist zu merken, dass die Werthe f, g, $d\varphi$, $\int r r \, dM$ sich blos auf jenes dt beziehen, binnen welchen ϑ um $d\vartheta$, und φ um $d\varphi$ wachsen, oder da f, V, $\int r r \, dM$, ϑ, φ, binnen dt als unveränderlich angenommen werden, so beziehen sich f, V, $\int r r \, dM$, φ, ϑ auf den Endpunkt von einerlei Zeit t. Der Ausdruck $\int r r \, dM$ ist allemal erst aus den Bedingnissen der Aufgabe zu bestimmen. Ist der um AB beschleunigte Körper in seiner Figur und Dichtigkeit unveränderlich, und geht die Rotation beständig fort um eine und dieselbe Axe AB vor sich, so ist $\int r r \, dM$ eine beständige Grösse I, und es ist $\frac{\int 2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM} = \frac{2g}{I} \int V.f.d\varphi$; ist nebstbei während der ganzen Rotationszeit f. V eine beständige Grösse, so ist $\int \frac{2 V f g \, d\varphi}{\int r r \, dM} = \frac{2g.f.V}{I} \varphi + C$. Ist hingegen des Körpers Dichtigkeit-Verhältniss oder dessen Figur, oder dessen Drehaxe veränderlich, und ist alles einem steten Gesetze unterworfen, so ist $\int r r \, dM$ eine veränderliche Grösse, und muss aus den Bedingnissen der Aufgabe als eine Funktion von $\varphi = F(\varphi)$ oder als eine Funktion von $t = f(t)$ ausgedrückt werden; ist eben so f. V veränder-

lich also $= F^{+}(\varphi)$ oder $= f^{+}(t)$, so ist $\int \frac{2\,V f g\, d\varphi}{\int rr\, dM} = 2g \int \frac{V f d\varphi}{\int rr\, dM} =$ $2g \int \frac{F^{+}(\varphi)\, d\varphi}{F(\varphi)} = 2g \int \frac{f^{+}(t)\, d\varphi}{f(t)}$. Um letztern Ausdruck zu integriren, muss $d\varphi$ durch t ausgedrückt werden; sey $\varphi = f(t)$ so ist $d\varphi = f'(t)\, dt$ (nach des Hrn. *Lagrange* Bezeichungsart) oder $d\varphi = \left(\frac{df(t)}{dt}\right) dt$, also ist $\int \frac{2\,V f g\, d\varphi}{\int rr\, dM} =$ $2g \int \frac{f^{+}(t)\, f'(t)\, dt.}{f(t)}$.

Ad S. 104. Z. 21. Dreht sich ein Körper mit irgend einer Winkelgeschwindigkeit um eine Axe AB, wirken auf den Körper gar keine äussern Kräfte, und erleidet diese Axe AB blos durch die Schwungkräfte der um AB laufenden Körperelemente keinen Druck, so ist AB eine freie Axe, sie hört auch nicht auf eine freie Axe zu seyn, wenn äussere Kräfte die Rotation des Körpers um AB beschleunigen, und auf die Axe AB Drucke ausüben, wenn nur von den Drucken, welche AB erleidet, kein Theil den blossen Centrifugalkräften der Körperelemente zugeschrieben werden kann.

Ad S. 105. Z. 26. Das folgt so: $x\, y\, dM =$
$- X\,Y.\ \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Sin}\,2\,\theta.\ dM + X.\,Z.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,2\,\theta.\ dM + \ldots$, also
$\int x\, y\, dM = - X.\,Y.\ \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Sin}\,2\,\theta.\ dM +$
$X.\,Z.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,2\,\theta.\ dM + \ldots\ldots\ldots$ also

$$\int x\, y\, dM = - \overset{+}{X}.\,\overset{+}{Y}.\ \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Sin}\,2\,\theta.\ d\overset{+}{M} +$$
$$\overset{+}{X}.\ \overset{+}{Z}.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,2\,\theta.\ d\overset{+}{M} + \ldots\ldots$$
$$- \overset{++}{X}.\ \overset{++}{Y}.\ \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Sin}\,2\,\theta.\ d\overset{++}{M} +$$
$$\overset{++}{X}.\ \overset{++}{Z}.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,2\,\theta.\ d\overset{++}{M} + \ldots\ldots$$

u. s. w. also $\int x\, y\, dM = - \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Sin}\,2\,\theta\ (X\,Y\,dM +$
$\overset{+}{X}.\overset{+}{Y}.\,d\overset{+}{M} + \overset{++}{X}\,\overset{++}{Y}\,d\overset{++}{M} + \ldots\ldots\ldots) + \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,2\,\theta\ (X\,Z\,dM +$
$\overset{+}{X}.\overset{+}{Z}.\,d\overset{+}{M} + \overset{++}{X}\ \overset{++}{Z}\ d\overset{++}{M} + \ldots\ldots\ldots) + \ldots\ldots\ldots\ldots =$
$- \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Sin}\,2\,\theta \int X\,Y\,dM + \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,2\,\theta \int X\,Z\,dM + \ldots\ldots$

also nach den oben angenommenen Bezeichnungen: $\frac{\int x\, y\, dM}{\mathrm{Cos}\,2\,\theta} =$

$- \text{Sin}\,\eta.\ \text{Cos}\,\eta.\ \frac{\text{Sin}\ 2\theta}{\text{Cos}\ 2\theta}.\ D + \text{Cos}\,\eta.\ \frac{\text{Cos}\ 2\theta}{\text{Cos}\ 2\theta}.\ E +$

$\text{Sin}\,\eta.\ \frac{\text{Cos}\ 2\theta}{\text{Cos}\ 2\theta}.\ F - \frac{1}{2}\,\text{Cos}^2\eta.\ \frac{\text{Sin}\ 2\theta}{\text{Cos}\ 2\theta}.\ A - \frac{1}{2}\,\text{Sin}^2\eta\ \frac{\text{Sin}\ 2\theta}{\text{Cos}\ 2\theta}.\ B +$

$\frac{1}{2}\frac{\text{Sin}\ 2\theta}{\text{Cos}\ 2\theta}.\ C$, oder $\frac{\int x\,y\,dM}{\text{Cos}\ 2\theta} = - D.\ \text{Sin}\,\eta.\ \text{Cos}\,\eta.\ \text{tang.}\ 2\theta + E.\ \text{Cos}\,\eta + F.\ \text{Sin}\,\eta. - \frac{1}{2}\,A.\ \text{Cos}^2\eta.\ \text{tang}\ 2\theta - \frac{1}{2}\,B.\ \text{Sin}^2\eta.\ \text{tang}\ 2\theta + \frac{1}{2}\,C.\ \text{tang}\ 2\theta$, und eben so ist $\frac{\int xz\,dM}{\text{Cos}\ \theta} = D\,(\text{Cos}^2\eta - \text{Sin}^2\eta) - \ldots\ldots\ldots$

Dass $\frac{\int x\,y\,dM}{\text{Cos}^2\ \theta} = o$ und $\frac{\int x\,z\,dM}{\text{Cos}\ \theta} = o$ sey, wenn AF eine freie Axe ist, folgt daraus, dass dann $\int x\,y\,dM = o$ und $\int x\,z\,dM = o$ ist, ferner, dass man annimmt, es habe die Ebene AXBEX′YA gegen die freie Axe AF eine solche Lage, dass EAF weder 45° nach 90° ist (denn im ersten Falle wäre $\text{Cos}\ 2\theta = o$, im zweiten wäre $\text{Cos}\,\theta = o$).

Ad S. 105. Z. 27. Diess folgt hieraus: Die hier bestehende auf Null reduzirte Gleichung ist von der Form $a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + mt^5 = o$, nun wird $a + bt + \ldots$ durch $1 + t^2$ theilbar seyn und zum Quotient eine Funktion von t^3 geben von der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}t + \mathfrak{D}t^2 + \mathfrak{G}t^3$, wenn $e - c + a = o$ und $m - d + b = o$; denn dividirt man $a + bt + ct^2 + dt^3 + mt^5$, so erhält man $a + bt + (c - a)\,t^2 + (d - b)\,t^3 + \frac{(e - c + a)\,t^4 + (m - d + b)\,t^5}{1 + t^2}$ zum Quotienten, welcher Ausdruck von der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}t + \mathfrak{D}t^2 + \mathfrak{G}t^3$ ist, wenn das letzte Glied, nemlich der Bruch: $\frac{(e - c + a)\,t^4 + (m - d + b)\,t^5}{1 + t^2} = o$, welches geschieht, wenn $e - c + a = o$ und $m - d + b = o$ ist.

Wir wollen nun sehen, ob diess bei unserer Gleichung eintrifft. Wir haben:

$$\frac{(F - Et)\,(Dt^2 + (A - B)\,t - D)}{(F - Et)^2\,(1 + t^2) - (Dt^2 + (A - B)\,t - D)^2} =$$

$$\frac{E + Ft}{A - C + 2Dt + (B - C)\,t^2}$$ oder wenn wir die Nenner wegschaffen:

$$(F + Et)\,(Dt^2 + (A - B)\,t - D)\,(A - C + 2\,Dt + (B - C)t^2) =$$
$$(E + Ft)\,((F - Et)^2(1 + t^2) - (Dt^2 + (A - B)\,t - D)^2) \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} -FD + F\,(A - B)\,t + FDt^2 - EDt^3 \\ +\quad EDt - E\,(A - B)\,t^2 \end{pmatrix}(A - C + 2Dt + (B - C)t^2)$$

$$= (E + Ft)\begin{pmatrix} F^2 - 2FEt + E^2t^2 - 2FEt^3 + E^2t^4 \\ D^2 + 2D\,(A - B)\,t + F^2t^2 - 2D\,(A - B)\,t^3 - D^2t^4 \\ -(A - B)^2\,t^2 \\ +2D^2\,t^2 \end{pmatrix}$$

oder wenn wir wirklich multipliziren und alle Glieder auf eine Seite bringen:

$$\begin{array}{llll}
-(A-C)FD & +F(A-C)(A-B)t & +FD(A-C)t^2 & -ED(A-C)t^3 - 2ED^2t^4 - ED(B-C)t^5 \\
-EF^2 & +ED(A-C)t & -E(A-B)(A-C)t^2 & +2FD^2t^3 + FD(B-C)t^4 + FD^2t^5 \\
+ED^2 & -2FD^2t & +2FD(A-B)t^2 & -2ED(A-B)t^3 - E(A-B)(B-C)t^4 - FE^2t^5 \\
 & -2ED(A-B)t & +2ED^2t^2 & +F(A-B)(B-C)t^3 - Et^4 \\
 & +FD^2t & -FD(B-C)t^2 & +ED(B-C)t^3 + ED^2t^4 \\
 & -F^3t & -E^3t^2 & +2FE^2t^3 + 2FD(A-B)t^4 \\
 & & -EF^2t^2 & +2ED(A-B)t^3 + 2F^2Et^4 \\
 & & -2ED^2t^2 & -2FD^2t^3 \\
 & & +E(A-B)^2t & +F(A-B)^2t^3 \\
 & & -2DF(A-B)t^2 & -FE^2t^3 \\
 & & +2F^2Et^2 & -F^3t^3
\end{array}$$

Nehmen wir wir jetzt die Koeffizienten von t^4 und jene von t^0 und addiren sie zu einander, so werden wir finden, wenn die angezeigten Multiplicationen wirklich verrichtet werden, dass ihre Summe den Koeffizienten von t^2 gibt; auf dieselbe Art geben die Koeffizienten ven t^5 und t den Koeffizienten von t^3, also gibt obiger Ausdruck durch $1 + t^2$ dividirt einen Ausdruck von der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}t + \mathfrak{D}t^2 + \mathfrak{G}t^3$; dieses $= 0$ gesetzt gibt aber für t einen oder 3 mögliche Werthe, da das letzte Glied keinen imaginären sichtbaren Ausdruck enthält. Dass die hier auf Null reduzirte Gleichung des 5ten Grades durch $1 + t^2$ dividirt allemal $= 0$ bleibt, folgt daraus, dass $1 + t^2 = Sec.^2\eta$ nie Null werden kann, sondern dessen kleinster möglicher Werth $= 1$ ist.

Ad S. 106. Z. 9. Diese Gleichungen sind nur wahr, wenn $\frac{\int x y d M}{\mathrm{Cos}\, 2\theta} = o$ und $\frac{\int x z d M}{\mathrm{Cos}\, \theta} = o$ ist. Dass $\int x y d M = o$ und $\int x z d M = o$ sey, folgt aus der Annahme der freien Axe AF, dass aber $\frac{\int x y d M}{\mathrm{Cos}\, 2\theta} = o$ und $\frac{\int x z d M}{\mathrm{Cos}\, \theta} = o$ bleibe, folgt daraus, dass man annehmen darf, es sey θ weder 45° noch 90°; denn ist AB eine freie Axe, so mag ich mir die Ebene ABEYA wie immer durch AB gelegt denken, in dieser Ebene die senkrechten Koordinaten X, Y = AX, XY und darauf die senkrechte Ordinate Z annehmen, so verändere ich zwar durch eine Umdrehung der Ebene ABEYA um AB die Gleichung zwischen X, Y, Z, und die Werthe von A, B, C, D, E, F, es bleibt aber alles in (§. 86. und 87.) Gesagte wahr. Nun kann ich die Ebene A B E Y A und A B allemal schon so gedreht annehmen, dass θ weder 45° noch 90° ist.

Ad S. 106. Z. 10. Aus der Gleichung $(F \cdot \mathrm{tang}\, \theta - (A - B\, \mathrm{Sin}\, \eta)\, \mathrm{Cos}\, \eta = o$ folgen für η zwei Werthe, denn der Ausdruck $(F \cdot \mathrm{tang}\, \theta - (A - B)\, \mathrm{Sin}\, \eta)\, \mathrm{Cos}\, \eta$ wird $= o$, wenn $\mathrm{Cos}\, \eta = o$, d. h. $\eta = 90°$, also $\mathrm{Sin}\, \eta = 1$ ist; Ferner wenn $\mathrm{Sin}\, \eta = \frac{F \cdot \mathrm{tang}\, \theta}{A - B}$. Herr Schubert betrachtet hier nur den Werth $\eta = 90°$, daher auch in den folgenden Zeilen der Ausdruck wenigstens vorkömmt. Hier ist wieder eine nothwendige Bedingung, dass θ nicht 90° sey, denn sonst wäre $\mathrm{tang}\, \theta = \infty$, also $F\, \mathrm{tang}\, \theta - (A-B)\, \mathrm{Sin}\, \eta = \infty$, aus $\infty \cdot \mathrm{Cos}\, \eta = o$ ist aber η nicht $= 90°$.

Ad S. 106. Z. 12. Da $\mathrm{tang}\, 2\theta = \frac{2F}{B-C}$, so folgen für θ zwei Werthe deren einer = EAF, heisse, daher der andere = EAF + 90° ist. Das folgt hieraus: $\mathrm{tang}\, 2\theta = \frac{2F}{B-C}$ heisst eigentlich: θ ist jener Winkel, welcher zwei Mal genommen einen Winkel gibt, dessen Tangente $= \frac{2F}{B-C}$ ist, heisse nun dieser Winkel = EAF, so ist, wenn EAK = 2EAF die Tangente von EAK = Eb = $\frac{2F}{B-C}$, (Taf. V. Fig. 11.) es ist aber Eb = $\frac{2F}{B-C}$ zugleich die Tangente von

E A s = 2 (E A F + 90) also ist E A F und E A F + 90 der Bedingung unterworfen, dass jeder gedoppelt $\frac{2F}{B - C}$ zur Tangente hat. Es hat also aus tang $2\,\theta = \frac{2F}{B - C}$ das θ die Werthe E A F und E A F + 90 = E A i.

Ad S. 106. Z. 27. Alles das ist aber nur unter der Voraussetzung wahr, dass die auf einander senkrechte Koordinaten X, Y, Z so bestimmt werden, dass X auf der freien Axe A B vom Schwerpunkte A an gemessen, Y auf X senkrecht in jener Ebene, wo die freie Axe A C liegt, aufgetragen, und Z mit der freien Axe A D parallel gesetzt werden.

Ad S. 107. Z. 10. Der hier geführte Beweis des merkwürdigen Satzes, dass jede durch den Schwerpunkt des Körpers laufende Axe A F, deren Trägheitsmoment ein max. und min. ist, eine der 3 sich im Schwerpunkte senkrecht schneidenden freien Axen sey, ist (meines Erachtens) nichts weniger als evident. Ich begreife wohl, dass, je nachdem $A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta - C$ eine positive oder negative Grösse ist, M. k. k — Mmm eine um so grössere positive oder negative Grösse sey, je grösser der positive oder je grösser der negative Werth von $\sin \theta$ ist, dass also, je nachdem $A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta - C = +$ oder $= -$ ist, Mkk — Mmm ein max. oder min. sey, je nachdem $\sin \theta = 1$ oder $= 0$, d. h. $\eta = 90^\circ$ oder $\eta = 0^\circ$ ist, in welchen beiden Fällen A F in A D fällt, das beweist aber nicht mehr, als dass das dem A F entsprechende M. k. k bei unverändertem η ein max. oder min. sey, wenn A F in A D fällt, beweist aber keineswegs, dass unter allen möglichen A F, die man durch A denken kann, jenes das durch A D läuft, der grössten Summe von Trägheitsmomenten M. k. k entspräche; denn es lässt sich hier einwenden: Gesetzt bei dem Werthe $\eta = \eta''$ sey M. k. k = M′. k′. k′ *ein max.* für $\theta = 90^\circ$, hingegen bei dem Werthe $\eta = \eta'$ sey M. k. k = M″. k″. k″ *ein min.* für $\theta = 90^\circ$, ist A F, das nun durch A D läuft ein max. oder min., wie das daraus folge sehe ich nicht ein. Ein vollkommen evidenter Beweis dieses berühmten Lehrsatzes ist folgender: Das Trägheitsmoment um A F (das durch den Schwerpunkt geht) ist allgemein $= A \sin^2 \eta + A \cos^2 \eta \sin^2 \theta + B \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta =$ *) $(A - A \sin^2 \theta - B + B \sin^2 \theta) \sin^2 \eta + (A - C) \sin^2 \theta + B + C = (A - B +$

*) Ich bemerke, dass hier θ jeden beliebigen Werth auch $= 45^\circ$ und 90° haben kann, da dieser Ausdruck aus $z = Y \cos \eta - X. \sin \eta$ und $\eta = Z. \cos \theta - X. \cos \eta \sin \theta - Y. \sin \eta \sin \theta$ folgt, und nur bei jenen Formeln θ weder 45° noch 90° haben darf, welche aus der Gleichung $- D \sin \eta \cos \eta \tan 2\,\theta + \ldots\ldots = 0$, oder jener $D (\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) - \ldots\ldots = 0$ folgen.

$\sin^2\theta$ (B — A)) $\sin^2\eta$ + (A — C) $\sin^2\theta$ + B + C, (heisse, A — B = K, B — A = — K, A — C = ± N, B + C = G) so ist diess Trägheitsmoment um AF = (K — K $\sin^2\theta$) $\sin^2\eta$ ± N $\sin^2\theta$ + G = G + K $\sin^2\eta$ + $\sin^2\theta$ (± N — K $\sin^2\eta$). Nun ist dieses blos in Bezug auf η ein max., wenn η = o oder = 90°, je nachdem K — K $\sin^2\theta$ = — oder = + ist; ein min. hingegen, wenn η = 90° oder = o, je nachdem K — K $\sin^2\theta$ = — oder = + ist. Aber blos in Bezug auf θ ist es ein max., wenn θ = o oder = 90°, je nachdem (± N — K $\sin^2\eta$) = — oder = + ist, hingegen ein min., wenn θ = 90° oder = o ist, je nachdem ± N — K $\sin^2\eta$ = — oder = + ist. Also ist das Trägheitsmoment von AF in Bezug auf η und θ ein max., wenn η = o und θ = o, oder wenn η = 90 und θ = o, oder wenn η = o und θ = 90, oder wenn η = 90 und θ = 90 nach Verschiedenheit der Fälle, eben so ist es in Bezug auf η und θ ein min., wenn η = o und θ = o, oder wenn η = 90 und θ = o, oder wenn η = o und θ = 90, oder wenn η = 90 und θ = 90 ist. In allen diesen Fällen aber fällt AF in AB, AC, oder AD; soll also die Summe der Trägheitsmomente um AF ein max. oder min. seyn, so muss AF eine der 3 freien Axen AB, AC oder AD seyn, welche sich im Schwerpunkte A senkrecht schneiden, und umgekehrt. Ist die Summe der Trägheitsmomente um AF ein max. oder min., unter den Summen der Trägheitsmomente (um jede durch den Schwerpunkt A laufende Axe), so ist AF eine der 3 sich im Schwerpunkt senkrecht schneidenden freien Axen (Hauptaxen). Der Ausdruck (K — K $\sin^2\theta$) $\sin^2\eta$ ± N $\sin^2\theta$ + G = G + K . $\sin^2\eta$ + $\sin^2\theta$ (± N — K $\sin^2\eta$) hat in Bezug auf η und θ allemal nur ein max. und ein min. Ist z.B. K — K $\sin^2\theta$ = + und ± N — K $\sin^2\eta$ = —, so ist er ein max., wenn η = 90° und θ = o, ein min., wenn η = o und θ = 90° ist, also fällt dann das max. des Trägheitsmoments für die in AC liegende, hingegen das min. des Trägheitsmoments für die in AD liegende Axe aus. Bestimmen wir also in einem Körper die Lage jener durch seinen Schwerpunkt A laufenden Axe, deren Trägheitsmoment ein max. unter allen solchen Axen AF und eben so die Lage jener deren Trägheitsmoment ein min. ist: so erhalten wir allemal zwei der Hauptaxen AB und AC oder AB und AD, oder AC und AD oder, worauf in A eine senkrecht Gezogene die dritte Hauptaxe ist. (Fände man mehrere max. und min., so wären jene zwei Axen zu nehmen, deren Trägheitsmomente das grösste unter den max. und das kleinste unter den min. wäre.) Es zweifelt wohl Niemand, dass es in jedem Körper nur eine Drei-

heit *) im Schwerpunkte A sich senkrecht schneidender Hauptaxen geben; denn gesetzt es gebe ihrer 2, die eine bestehend aus AB, AC, AD, die andere aus AB′, AC′, AD′, sey ferner das Trägheitsmoment einer durch A laufenden Axe AF durch $(K - K \sin^2 \theta) \sin^2 \eta + N \sin^2 \theta + G = G + K \sin^2 \eta + \sin^2 \theta\ (N - K \sin^2 \eta)$ in Bezug auf AB, AC, AD, ausgedrückt, eben so sey diess Trägheitsmoment durch $(K' - K' \sin^2 \theta') \sin^2 \eta' + N \sin^2 \theta' + G' = G' + K' \sin^2 \eta' + \sin^2 \theta'\ (N' - K' \sin^2 \eta')$ in Bezug auf AB′, AC′, AD′ ausgedrückt. Nun werde z. B. erster Ausdruck in Bezug auf η und θ ein max. für $\eta = 0$, $\theta = 90$, und ein min. für $\eta = 90$ und $\theta = 0$: so hat unter den durch A laufenden Axen jene, welche in AD liegt, ein max., jene welche in AC liegt, ein min. an Trägheitsmoment, suche ich nun wenn der zweite Ausdruck ein max. oder min. werde, so muss diess bei jenen Werthen von η und θ seyn, wodurch die Lagen AD und AC erhalten werden, diess widerspricht aber dem (§. 88.), wo erwiesen wurde, dass von drei sich im Schwerpunkt senkrecht schneidenden Axen AB′, AC′, AD′ die eine ein max. die andere ein min. an Trägheitsmoment unter allen jenen Axen habe, welche durch A gezogen werden können, AD, AC liegen aber weder in AB′ noch AC′ noch AD′. Sind AB, AC, AD die drei Hauptaxen des Körpers, so kann es auch keine einzelne freie Axe mehr ausser AB, AC, AD in diesem Körper geben, denn eine einzelne freie Axe AB′ würde (§. 87.) zwei in A darauf und unter sich senkrechte freie Axen AC′, AD′, voraussetzen, wodurch nebst der Dreiheit von Axen AB, AC, AD, noch jene von AB′, AC′, AD′ entstünde. Unter allen jenen Axen, welche nicht durch den Schwerpunkt A des Körpers laufen, ist ohnehin keine eine freie Axe (§. 76.). Jeder Körper hat also eine Dreiheit freier sich im Schwerpunkte senkrecht schneidender Axen, und ausser diesen drei freien Axen keine

*) Anmerkung. Man erlaube mir hier, einen bisher ungebrauchten Ausdruck anzuwenden, nemlich jenen der Dreiheit, worunter ich 3 zusammengehörige Dinge einerlei Art verstehe. Es ist wohl eben so vernünftig, ein Wort für 3 Dinge einerlei Art als für 2 zu fordern, für 2 hat man das Wort Paar, warum sollte man nicht auch für 3, 4, 5, ... Dinge einerlei Art sich der Ausdrücke Dreiheit, Vierheit, Fünfheit, ... bedienen, da man doch Einheit sagt; freilich wäre es dann systematischer, statt Paar zu sagen, Zweiheit, denn so hätte man dann die sich auf successive Begriffe beziehenden Ausdrücke Einheit, Zweiheit, Dreiheit, Vierheit, ... Hätte der Mensch an seinem Körper irgend ein Hauptheil, z. B. dreimal, z. B. er hätte 3 Arme statt 2, so gebe es gewiss in allen Sprachen ein Wort, das so viel ausdrückte als Dreiheit. Wären die Finger ein auffallender Theil am menschlichen Körper, so bestände ein mit dem Worte Fünfheit gleichbedeutender Ausdruck in allen Sprachen.

freie Axe mehr. Dieser allgemeine Satz hat jedoch seine Ausnahmen. Sind AB und AF freie Axen, also (§. 87.) $D = o$, $E = o$, $\int xy\,dM = o$, $\int xz\,dM = o$, also $F \sin\eta - \frac{1}{2}\tan 2\theta\,(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta - C) = o$ und $(F.\ \tan\theta - (A - B)\sin\eta)\cos\eta = o$ (wobei vorausgesetzt ist, dass θ weder 45° noch 90° ist (§. 86.), und ist $B = C$, so ist aus $(F.\ \tan\theta - (A - B)\sin\eta)\cos\eta = o$ ein Werth von η wieder $= 90°$, aber es folgt dann aus $F\sin\eta - \frac{1}{2}\tan 2\theta\,(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta - C) = o$ oder aus $F = \frac{1}{2}\tan 2\theta\,(B - C) = o$, dass θ (ausser 45 und 90 Graden) alle jene Werthe haben kann, welche so beschaffen sind, dass deren Duplum zur Tangente eine endliche Grösse haben, welche mit o multiplizirt $= 2F$ geben, welches $2F$ selbst $= o$ ist, in dem aus obigem folgt $2F = \tan 2\theta.\ o$; ist also $B = C$, so ist jedes AF eine freie Axe, wobei $\eta = 90°$ und θ ausser 90° und 45° was immer für Werthe hat, in diesem Falle hat also der Körper nebst AB noch unendlich viele durch A laufende freie Axen in der Ebene CAD. Diess ist der (meines Erachtens) deutlicher ausgedrückte Sinn der ersten acht Zeilen des §. 89. Ich muss hier nur bemerken, dass ein $= \frac{o}{o}$ herauskommender Ausdruck desshalb keine willkürliche oder unbestimmte Grösse sey, denn Jedermann weiss aus den Grundlehren der Differenzialrechnung, dass man dessen Werth (nemlich den Quotienten der Koeffizienten dieser Nullen) wirklich bestimmen könne. Ist (immer noch unter der Voraussetzung, dass θ weder 45° noch 90° betrage) AB eine freie Axe, AF eine freie Axe, also $D = o$, $E = o$, $\int xy\,dM = o$, $\int xz\,dM = o$, also $F\sin\eta - \frac{1}{2}\tan 2\theta\,(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta - C) = o$, $(F.\ \tan\theta - (A - B)\sin\eta)\cos\eta = o$; ist ferner $A = B = C$, so ist $F\sin\eta - \frac{1}{2}\tan 2\theta.\ o = o$ oder $F\sin\eta = o$ und $(F\tan\theta)\cos\eta = o$, welchen Gleichungen ein Genüge geschieht, bei allen Werthen von η, und bei allen Werthen von θ (ausser 45° und 90°). Da $F = o$ wenn $A = B = C$ (ist $A = B = C$, und AB eine freie Axe, so ist $F = o$, das folgt hieraus *)), also sind in dem Falle, wo AB eine freie Axe ist, durch welche eine Ebene ABEA gelegt, auf AB die Abscisse X, senkrecht darauf die Ordinate Y in der Ebene ABEA und darauf senkrecht die Ordinate Z gemessen werden, u. s. w. (§. 86. und 87.) und wo $A = B = C$ ist, (A, B, C, D, E, F beziehen sich auf das hier bestimmte Koordinatensystem) alle durch den Schwerpunkt A gedachte Axen (ausser jenem Werthe bei irgend einem η dem $\theta = 45°$ und 90° entsprechen) freie Axen. Ist (Fig. 25.) AB die Axe

*) Es wurde so eben angezeigt, dass, wenn $B = C$ ist, $F = o$ sey, welches wahr bleibt wenn $B = C = A$ ist.

der X, AC jene der Y, AD jene der Z; sind AB, AC, AD, 3 freie Axen, und ist überhaupt alles so wie §. 88. angenommen: so ist die Summe der Trägheitsmomente um AF $= A (\sin^2 \eta + \cos^2 \eta \sin^2 \theta) + B (\cos^2 \eta + \sin^2 \eta \sin^2 \theta) + C. \cos^2 \theta$, woselbst θ auch 45° oder 90° haben kann, ist nun $A = B = C$, so ist diess Trägheitsmoment $= 2 A$; das Trägheitsmoment um AB $= 2 A$, um AC $= 2 A$, um AD $= 2 A$. Ist umgekehrt die Summe der Trägheitsmomente um AB $=$ jener um AC $=$ jener um AD, so ist $B + C = A + C = A + B$, woraus $A = B = C$ ist, daher dann alle durch A gedachte Axen, ausser jenen für $\theta = 45°$ und 90°, freie Axen sind. Man bemerke, dass (§. 88.) wenn AB, AC, AD einander nur senkrecht im Schwerpunkte A schneiden, ohne selbst freie Axen zu seyn, und wenn AB, AC, AD die Axe der X der Y der Z sind, dass die Trägheitsmomente um AB, AC, AD $= B + C$, $A + C$, $A + B$ sind. Sind unter diesen Umständen diese Trägheitsmomente unter einander gleich, so ist $A = B = C$; ist ferner nur AB eine freie Axe, so ist jede durch A laufende Axe eine freie Axe, wenn nur deren θ nicht 45° noch 90° ist. Wenn hier zu wiederholten malen bemerkt wurde, dass θ nicht 45° noch 90° haben dürfe, so könnte das nie heissen, dass bei $\theta = 45°$ oder 90° dasjenige nicht Statt finden könne, was (unter übrigens gleichen Umständen) bey andern Werthen von θ Statt fände, sondern es hiess diese Anmerkung allemal nur so viel, dass die jedesmalige Axe AF, die η und θ entspreche, als freie Axe nur für jene Werthe von θ erwiesen wäre, welche weder 45° noch 90° betrügen, da die Fundamentalgleichung (§. 86.) $D (\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) \; . \; . \; . \; . = 0$, und $- D \sin \eta \cos \eta \tang 2 \theta \; . \; . \; . \; . = 0$, als wahr nur für jene Werthe von θ erwiesen sind, welche weder 45° noch 90° betragen, es ist aber nicht erwiesen, dass sie falsch seyen für $\theta = 45°$ oder 90°.

Ist das Trägheitsmoment um jede Axe AF, die durch den Schwerpunkt läuft, eine beständige Grösse, so ist $B + C = A + C = A + B$, also $A = B = C$; ist ferner AB eine freie Axe, so ist jede durch A laufende Axe, die nicht mit der Ebene BACB einen Winkel $\theta = 45°$ oder 90° bildet, eine freie Axe; es ist aber auch jede mit BACB einen Winkel $\theta = 45°$ oder 90° bildende durch A laufende Axe eine freie Axe; denn giebt man AC und AD (welche immer noch auf einander senkrecht bleiben) andere Lagen AC′, AD′, doch so, dass die Ebene AC′D′A auf der freien Axe AB immer noch senkrecht bleibe, und dass AB, AC′, AD′ einander immer noch im Schwerpunkte A senkrecht schneiden; nennt bei diesem veränderten Koordinatensystem, A', B', C', D', E', F', η', θ', was bei dem vorhergehenden A, B, C, D, E, F, θ, η, hiess, so sind die Trägheitsmomente um AB, AC, AD $= B' + C'$, $A' + C'$, $A' + B'$, welche immer

noch unter einander gleich sind, daher $A' = B' = C'$ ist, woraus folgt, dass jede durch A laufende Axe eine freie Axe ist, wenn sie nicht mit der Ebene $BAC'B$ einen Winkel $\theta' = 45°$ oder $90°$ bildet.

Ad S. 108. Z. 7. $\int$ heisst hier immer nur Summe nicht Integral, in dessen strengster Bedeutung; ferner haben hier A, B, C, D, E, F die Bedeutungen von (§. 86.), $A = \int xx\,dM$, $B = \int yy\,dM$, $C = \int zz\,dM$, $D = \int xy\,dM$, $E = \int xz\,dM$, $F = \int yz\,dM$.

Ad S. 108. Z. 16. Um das hier Gesagte wohl zu verstehen, und mit dem eigentlichen Geiste der Differenzial- und Integral-Rechnung zu verbinden, bemerke man folgendes: Man gedenke sich den ganzen Körper, welcher durch die Rotation der Fläche AMBCA um die Axe AC entsteht, in lauter auf AC senkrechte Cylinder von den unendlich kleinen Dicken dx getheilt; ferner theile man jeden solchen Cylinder durch mit AC parallel laufende Ebenen (d. h. durch Ebenen, welche auf die obere und untere Grundfläche dieser Cylinder senkrecht zu stehen kommen), welche jeden solchen Cylinder in physische Sektoren theilen, deren jeder an der Axe AC einen Winkel $= d\varphi$ bildet, endlich theile man jeden solchen Cylinder in physische Ringe von den Breiten dr und der Höhe dx, welches durch auf die Grundflächen jedes solchen Cylinders senkrecht gesetzte Cylinderoberflächen, deren Radien von einander nur um die Grösse dr abweichen, geschieht. Auf diese Art ist der ganze Körper in Parallelepipeda getheilt, deren jedes allgemein den drei Dimensionen dx, $r\,d\varphi$, dr entspricht, daher allgemein $dM = dx.\,dr \times r\,d\varphi$. Die Lage jedes solchen Elements wird durch die zusammengehörigen auf einander senkrechten Koordinaten x, y, z, oder durch x, φ und r bestimmt. Ich will hier nur zeigen, wie (übereinstimmend mit dem Geiste der Differenzial- und Integral-Rechnung) A gefunden werden könne, woraus dann nach denselben Grundsätzen nach ähnlichem Raisonnement Jedermann auch B, C, ... zu finden im Stande seyn wird. $A = \int xx\,dM$ ist eigentlich die Summe folgender Glieder:

$$dx'^2\,(d\overset{+}{M}' + d\overset{++}{M}' + d\overset{+++}{M}' + \ldots\ldots) +$$
$$(dx' + dx'')^2\,(d\overset{+}{M}'' + d\overset{++}{M}'' + \ldots\ldots) +$$
$$(dx' + dx'' + dx''')^2\,(d\overset{+}{M}''' + d\overset{++}{M}''' + d\overset{+++}{M}''' + \ldots\ldots) +$$
$$+ \ldots\ldots + x^2\,(d\overset{+}{M}^{-} + d\overset{++}{M}^{-} + d\overset{+++}{M}^{-} + \ldots\ldots),$$

worein ich folgenden Sinn lege: Ich theile den Körper in die erwähnten auf AC senkrechten Cylinder von den Höhen dx', dx'', dx''', ... dx^{-}, spreche von dem Theile

BCXM welcher $CX = x$ entspricht, und wenn $d\overset{+}{M}'$, $d\overset{++}{M}'$, $d\overset{+++}{M}'$, ... alle im Cylinder von der Dicke dx' enthaltenen Elemente $dx'. dr'. rd\varphi$, eben so $d\overset{+}{M}''$, $d\overset{++}{M}''$, $d\overset{+++}{M}''$, ... alle im Cylinder von der Dicke dx'' enthaltenen Elemente $dx''. dr. rd\varphi$, u. s. w., so wie ich $d\overset{+}{M}^-$, $d\overset{++}{M}^-$, $d\overset{+++}{M}^-$ alle in jenem Cylinder enthaltenen Elemente $dx^-. dr \times rd\varphi$ nenne, welcher an Dicke $= dx^-$ ist, und die letzte unendlich dünne Schichte des Theils BMXC ausmacht, woselbst alle $dx^-. dr. rd\varphi$ einerlei x, aber verschiedenen Werthen von y, z, φ, r entsprechen. A ist eine Funktion von x, deren algebraischer Ausdruck gefunden wird, wenn man aus den Bedingnissen der Aufgabe deren Differenzial, (nemlich jenes Nullinkrementum, worum A wächst, wenn x um dx wächst) ansetzt, und diesen angesetzten algebraischen Differenzialausdruck integrirt, wobei blos x eine veränderliche Grösse ist. Wir nennen diesen Differenzialausdruck $= A'$, und wollen ihn nun bestimmen. Denken wir uns über BCMX hinaus noch die auf CA senkrechte unmittelbar folgende Schichte von der Dicke dx, nennen alle darin enthaltenen Elemente $dx. dr. rd\varphi = d\overset{+}{M}, d\overset{++}{M}, d\overset{+++}{M}, \ldots$ so ist offenbar $A' = (x + dx)^2 (d\overset{+}{M} + d\overset{++}{M} + d\overset{+++}{M} + \ldots) = x (d\overset{+}{M} + d\overset{++}{M} + d\overset{+++}{M} + \ldots)$. Nun kommt es darauf an, $d\overset{+}{M} + d\overset{++}{M} + d\overset{+++}{M} + \ldots$ auszudrücken. Betrachten wir in dieser Schichte, worin (Taf. V. Fig. 12.) $XY = y$, $YZ = z$, $XZ = r$ ist, blos jene Elemente $dx. dr. rd\varphi$, welche in jenem Ringtheile von der Breite dr enthalten sind, welcher r und φ entspricht, so ist, wenn wir blos von diesem Ringe sprechen, r beständig und blos φ veränderlich, und die Summe dieser abdz enthalten Elemente $= \int dx. dr. rd\varphi = dx. dr. r \int d\varphi = dx. dr. r. \varphi + C$, worin C so bestimmt wird, dass dieser Ausdruck für $\varphi = o$ verschwinde (d. h. in dem Sinne verschwinde, dass er $= o$ wäre, wenn auch dx, dr, endliche Differenzen wären), substituirt man in diesen Ausdruck $\varphi = 2\pi$, so hat man den Ausdruck für die Summe der im ganzen Ringe, welcher in dieser Schichte dem $r = XZ$ entspricht, enthaltenen Elemente $dx. dr. rd\varphi$. Offenbar ist aber dieser enthaltene Ausdruck F nichts anders als jenes Nullinkrementum, worum die Summe aller in jenem Stücke der Schichte (welche x oder dx entspricht) enthaltenen Elemente $dx. dr. rd\varphi$, das dem $r = XZ$ entspricht, wächst, wenn r um dr zunimmt; wird also F in Bezug auf r integrirt, und die Konstante so bestimmt, dass dieser Ausdruck für $r = o$ verschwindet, so erhält man den Ausdruck dieser Summe, und wird in diesem Ausdruck $r = u$ substituirt, so hat man den Ausdruck aller in der ganzen Schichte (welche x und dx entspricht) enthaltenen Ele-

mente. Da nun u eine Funktion von x ist, so kann man in diesem Ausdrucke statt u diese Funktion von X durchaus setzen, und so hat man einen algebraischen Ausdruck f, worin ausser x keine veränderliche Grösse vorkömmt. Es ist $A' = x^2 . f$ also $A = \int x^2 . f$, wo alles blos in Bezug auf x integrirt wird; bestimmt man hier die Konstante so, dass der erhaltene Ausdruck für $x = a$ verschwindet, so hat man die Summe $\int x^2 dM$ für alle Elemente im ganzen Theile, der durch jene zwei auf AC senkrechten Ebenen begrenzt wird, deren eine vom Anfangspunkte (von wo aus x gemessen wird) um a, die andere um x entfernt ist. Um A zu erhalten, darf ich also nur $dx. dr. rd\varphi$ in Bezug auf φ integriren, die Konstante so bestimmen, dass der erhaltene Ausdruck für $\varphi = o$ verschwinde, und darein $\varphi = 2\pi$ substituiren, ferner diesen erhaltenen Ausdruck $dx. dr. r. 2\pi$ in Bezug auf r integriren, die Konstante im erhaltenen Ausdruck so bestimmen, dass er für $r = o$ verschwinde, und darein $r = u$ substituirt, ferner den erhaltenen Ausdruck $\pi dx u^2 = \pi dx f(x)^2$ mit x multipliziren, den Ausdruck $\pi. x. x. dx. f(x)^2$ in Bezug auf x integriren, und in dem hiedurch erhaltenen Ausdruck die Konstante so bestimmen, dass er für $x = a$ verschwinde. Ganz dasselbe wird aber erhalten, wenn man mit $xxdxdrrd\varphi$ das thut, was Herr Schubert durch $\int xxrdxdrd\varphi$ so viel als: Integrire $xxrdxdrd\varphi$ in Bezug auf φ, bestimme darin die Konstante so, dass der erhaltene Ausdruck für $\varphi = o$ verschwinde, und substituire $\varphi = 2\pi$, ferner integrire den hiedurch erhaltenen Ausdruck $xxrdxdr\ 2\pi$ in Bezug auf r, bestimme in dem erhaltenen Ausdrucke die Konstante so, dass er für $r = o$ verschwinde, und substituire $r = u = f(x)$; ferner integrire den hiedurch erhaltenen Ausdruck $xxdx. \pi. f(x)^2$ in Bezug auf x, und bestimme in dem erhaltenen Ausdrucke die Konstante so, dass er für $x = a$ verschwinde, so ist A gefunden.

Ad S. 108. Z. 19. Diess ist eigentlich so zu verstehen: Die erste Integration von $xrdxdrd\varphi$ giebt $xrdxdr\ 2\pi$, von $rrdrdxd\varphi \cos\varphi$ giebt $rrdrdx. o$, von $rrdrdxd\varphi \sin\varphi$ giebt $rrdrdx. o$; ferner die zweite Integration von $rrdrdxd\varphi \cos\varphi$ giebt $\frac{odx}{3} f(x)^3$, von $rrdrdxd\varphi \sin\varphi$ giebt $\frac{odx}{3} . f(x)^3$; ferner die dritte Integration von $rrdrdxd\varphi \cos\varphi$ giebt $\frac{o}{3} \int f(x)^3 dx = \frac{o}{3} F(x) + C = \frac{o}{3} F(x) = \frac{o}{3} (F(x) - F(a)) = o$, [denn f(x) ist eine endliche Grösse $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \ldots\ldots$ Sey hieraus $f(x)^3 dx = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{d}x^2 + \mathfrak{r}x^3 + \ldots\ldots) dx$ und $F(x) = (\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}x}{2} + \frac{\mathfrak{d}x^2}{3} + \frac{\mathfrak{r}x^3}{4} + \ldots) x$, so ist dieser Ausdruck also auch jener $F(x) - F(a)$ end-

lich] eben so von $rrdrdxd\varphi \sin\varphi$ giebt $= 0$, also ist $\int ydM = 0$ und $\int zdM = 0$, folglich liegt AC im Schwerpunkte des Körpers, welcher durch Rotation der Ebene ACBMA um AC entsteht. Man lasse sich durch die Bezeichnungen des Herrn Schubert $2\pi \int xrdxdr$, welches eigentlich heissen soll $xrdxdr.\ 2\pi$ nicht irre machen, er will durch das gelassene Zeichen $\int$ nur so viel andeuten, dass um $\int xdM$ zu erhalten, noch fernere Integrationen mit $xrdxdr.\ 2\pi$ vorzunehmen sind, eben so von den übrigen.

Ad S. 108. Z. 20. $\int d\varphi \cos^2\varphi = \int d\varphi \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int d\varphi + \frac{1}{2}\int \cos 2\varphi\, d\varphi =$, $\left(\text{wenn } 2\varphi = z,\ d\varphi = \frac{dz}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\int \frac{\cos z.\ dz}{2} = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin z = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + C$, aber $\frac{1}{2}\, 0 + \frac{1}{4}\sin 2.0 + C = 0$, also $C = 0$; wird nun statt $\varphi = 2\pi$ substituirt, so erhält man π.

Ad S. 108. Z. 25. Um die letzten 4 Zeilen des vorletzten Absatzes in (§. 90.) wohl zu fassen, ist folgendes zu erwägen: Nimmt man die in diesem (§. 90.) vorgeschriebenen Integrationen mit $xrr \cos\varphi\, dxdrd\varphi$ und $xrr \sin\varphi\, dxdrd\varphi$ vor, so erhält man $\int xydM = \frac{0}{3}\int x\, f(x)^3\, dx = \frac{0}{3}\,(f(x) - f(a))$, und $\int xzdM = \frac{0}{3}\int x\, f(x)^3\, dx = \frac{0}{3}\,(f(x) - f(a))$, daher (§. 76.) AC eine freie Axe des (durch Rotation der Ebene ACBMA um AC entstandenen) Körpers ist, da AC nebst dem dass dabei $\int xydM = 0$ und $\int xzdM = 0$ ist, durch dieses Körpers Schwerpunkt läuft, wie vorhin gezeigt wurde. Dieser Lehrsatz ist an und für sich ohne alle Rechnung einleuchtend, und würde schon (§. 75. S. 91. Z. 6.) angeführt.

Nimmt man die 3 vorgeschriebenen Integrationen mit $r^3 \cos^2\varphi\, dxdrd\varphi$ und $r^3 \sin^2\varphi\, dxdrd\varphi$ vor, so erhält man $B = \int yydM = \frac{\pi}{4}\int f(x)^4\, dx = \frac{\pi}{4}\,(f^+(x) - f^+(a))$, und $C = \int zzdM = \frac{\pi}{4}\int f(x)^4\, dx = \frac{\pi}{4}\,(f^+(x) - f^+(a))$. Es ist also (§. 89.) jede durch des Körpers Schwerpunkt laufende auf AC senkrecht stehende Axe eine freie Axe, welches hier auch von jener wahr ist, welcher $\theta = 45°$ und $90°$ entsprechen, denn man kann die Ebenen der y und z, welche sich in AC senkrecht schneiden, mit Beibehaltung ihres senkrechten Schneidens um AC wie immer drehen, so bleibt $\int yydM$ und $\int zzdM$ unverändert, also bei jeder Lage dieser Ebenen ist $B = C$, also für θ nicht $45°$ noch $90°$ für jede durch des Körpers Schwerpunkt auf AC senkrecht laufende Axe deren Freiseyn erwiesen, sey die Lage besagter Ebenen, welche immer.

Ad S. 108. Z. 32. Das in dem letzten Absatze dieses §. 90. Gesagte möchte folgendermaassen deutlicher ausgedrückt seyn. Es ist bei unserm durch Rotation der Ebene ACBMA um AC entstandenen Körper, nach dem hier angenommenen Koordinatensysteme $\int x\,dM = \pi \int u\,u\,x\,dx = \pi \int f(x^2)\,x\,dx$, $\int x\,x\,dM = A =$ $\pi \int u\,u\,x\,x\,dx = \pi \int f(x)^2 . x^2 . dx$, $\int y\,y\,dM = B = \frac{\pi}{4} \int u^4\,dx =$ $\frac{\pi}{4} \int f(x)^4\,dx$, $\int z\,z\,dM = C = \frac{\pi}{4} \int u^4\,dx = \frac{\pi}{4} \int f(x)^4\,dx$, wobei zu merken: In jeder dieser Gleichungen heisst zur linken Hand das Zeichen $\int$ so viel wie Summe, hingegen zur rechten Hand so viel als Integral; ferner bezieht sich jeder in diesen Gleichungen bestehende Ausdruck auf alle dM, welche in jenem ganzen Körpertheile enthalten sind, welchen man betrachtet; dieser Theil ist allemal bestimmt 1) durch jenen Werth a von x, bei welchem der Körpertheil = o ist; 2) durch den Werth von x, über welchen hinaus der Körpertheil nicht mehr kontinuirt ist, oder mit andern Worten, der Körpertheil ist begrenzt durch die in den Endpunkten von a und x [a und x vom Anfangspunkte der x gemessen] auf AC senkrecht stehenden Ebenen. Sey von dem Körpertheile 𝔄𝔐𝔑ℭ, (Taf. VII. Fig. 3.) (welcher durch Rotation der Ebene ℭ𝔄B𝔐𝔯 um die Axe ℭ𝔯 entstanden ist) der in der Axe ℭ𝔯 liegende Schwerpunkt in C. Betrachten wir aber nur den Körpertheil 𝔄MNℭ, wobei wir x, y, z, r, dM, φ, ... wie bisher bestimmen, mit der einzigen Einschränkung (welche an den Gleichungen nichts ändert), dass wir x von C aus nach X positiv und nach ℭ negativ messen. Hier ist x = CX und a = der negativen Länge Cℭ. $\int y\,dM = o$, $\int z\,dM = o$, D = o, E = o, F = o, $\int x\,dM = \pi \int f(x)^2 x\,dx$ = $\pi\,(F(x) - F(C\mathfrak{C}))$, $\int x\,x\,dM = A = \pi \int f(x)^2 x^2\,dx = \pi\,(f(x) - f(C\mathfrak{C}))$, B = C = $\frac{\pi}{4} \int f(x)^4\,dx = \frac{\pi}{4}\,(f^+(x) - f^+(C\mathfrak{C}))$. Diess ist wahr für jeden Theil 𝔄MNℭ dieses Körpers 𝔄𝔐𝔑ℭ, welcher x = x entspricht, also auch für jenen 𝔄𝔐𝔑ℭ, welcher x = C𝔯 entspricht, welches C𝔯 wir ausschliesslich = X nennen wollen. Es ist demnach im Körper 𝔄𝔐𝔑ℭ, dessen X von seinem Schwerpunkte C an gemessen wird, die Summe aller xdM, welches nun durch $\int X\,dM$ anzudeuten = π (F(X) — F(Cℭ)), die Summe aller xxdM nun $\int XX\,dM = A = \pi\,(f(X) - f(C\mathfrak{C}))$, die Summe aller y y dM und aller z z dM nun $\int YY\,dM = B$, und $\int ZZ\,dM = C =$

$\frac{\pi}{4}$ $(f^{+}(X) - f^{+}(C\mathfrak{C}))$. Da aber C der Schwerpunkt von $\mathfrak{AMNC}$ ist, so ist: $\frac{\int X dM}{\int dM} = 0$, also $\int X dM = 0$, also $F(X) = F(X) = F(C\mathfrak{C})$.

Ad S. 109. Z. 8. Das ist so zu verstehen. Misst man x auf der Axe CA (Taf. VI. Fig. 5.) nicht vom Mittel- und Schwerpunkte C an, sondern vom Scheitel der kleinen Axe b an, nemlich von A′ nach A positiv, und trägt darauf die Ordinaten u der Ellipse senkrecht auf (x und u bestimmen die Ellipse, deren Rotation um die kleine Axe A′ A = 2 b das an den Polen gedrückte Sphäroid vom Aequators-Durchmesser B B′ = 2 a beschreibt), so ist $x = b + X$, also da $u^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - X^2)$ ist, $u^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - (x - b)^2) = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$. Nun ist $M = \int dr \,.\, dx \,.\, r d\varphi$ in demselben Sinne als $A = \int xxrdxdrd\varphi$ (§. 90.) wie sich diess nach jenem Raisonnement leicht zeigen lässt, das dort den eigentlichen Geist der Formeln $A = \int xxrdrd\varphi dx$, $B = \ldots\ldots$ erklärte, nur ist hier bei der letzten Integration die Konstante so zu bestimmen, dass das letzte Integrale = 0 sey für x = 0, also ist hier 0 was wir seither a nannten. Unter diesen Bestimmungen gibt die 1te Integration = $dr \,.\, dx \,.\, r \,.\, 2\pi$, die 2te Integration = $\pi \,.\, dx \,.\, u^2$, die 3te Integration = $\pi \int u^2 dx = \pi \int \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)\,dx = \pi\left(\frac{a^2}{b}x^2 - \frac{a^2}{3b^2}x^3\right)$, also $M = \pi\left(\frac{a^2}{b}x^2 - \frac{a^2}{3b^2}x^3\right)$, wo M die Masse des von A aus bis zum Ende von x reichenden Stücks des Sphäroids ist, oder jenes Stück des Sphäroids das zwischen jenen auf A′ A senkrechten Ebenen eingeschlossen ist, deren eine durch A′ die andere durch den Endpunkt von x läuft; für x = 2 b ist also M die Masse des ganzen Sphäroids, nemlich $M = \frac{4}{3}\pi a^2 b$. Masse heisst hier Gewicht jener Masse, deren Volum man betrachtet, und es ist allemal angenommen, dass das Gewicht der kubischen Einheit = 1 sey.

Ad S. 109. Z. 11. Dass bei unserm an den Polen A′ und A zusammengedrückten Sphäroide das grösste und kleinste Trägheitsmoment unter allen durch den Schwerpunkt C desselben laufenden Axen jenen Axen entspreche, welche die kleine Axe 2 b und der Aequatorsdurchmesser 2 a sind, folgt daraus. Es machen hier jegliche zwei

auf einander senkrechte Aequatorsdurchmesser und die Axe A′ A eine Dreiheit freier Axen aus, welche sich im Schwerpunkte C schneiden, wie (§. 90.) gezeigt worden. Nehmen wir nun eine solche Dreiheit freier Axen an, und nennen diese Axen (wie Fig. 23.) AB, AC, AD; nehmen wir ferner AB, AC, AD als Axen der X, der Y, der Z an, so ist in dem Sinne von (§. 88.) das Trägheitsmoment um eine beliebte durch C (Fig. 25.) oder A (Fig. 23.) laufende Axe = $A (\sin^2\eta + \cos^2\eta \sin^2\theta) + B (\cos^2\eta + \sin^2\eta \sin^2\theta) + C \cos^2\theta$, oder (da hier B = C ist) = $A (\sin^2\eta + \cos^2\eta \sin^2\theta) + B (\cos^2\eta + \sin^2\eta \sin^2\theta + \cos^2\theta)$ = ... diess Trägheitsmoment ein *max.* oder *min.* in Bezug auf η, je nachdem $\eta = 0$ oder $= 90°$, oder umgekehrt, und in Bezug auf θ ein *max.* oder *min.* je nachdem $\theta = 0$ und $90°$ oder umgekehrt.

Ad S. 109. Z. 16. Hier muss ich vorläufig folgendes bemerken: Wenn man sich durch einen Körper eine Axe gezogen denkt, ferner um diese Axe den Körper in Rotationsbewegung sich vorstellt, welche Rotationsbewegung darum gerade um diese Axe geschieht, weil diese Axe in ihren beiden Enden gehalten wird, und es ist diese Axe beständig fort eine freie Axe, sowohl in Bezug der auf diese Axe Statt findenden Drucke durch die Schwungkräfte der um selbige laufenden Körperelemente, als in Bezug aller jener äussern Kräfte, deren Richtungen in den auf dieser Axe senkrechten Ebenen liegen, so wird der Körper, wenn keine Axe desselben in ihren Endpunkten unterstützt wird, d. h. wenn er ein freischwebender Körper ist (wie z. B. ein in der Luft nicht schwerer Körper wäre) sich um dieselbe Axe beständig drehn; das folgt hieraus: Dieser Körper, von denselben Kräften bestimmt, wird seine Rotation allemal um jene Axe verrichten, welche in ihren beiden Enden unterstützt ist, d. h. bei welcher in ihren beiden Enden jene auf sie senkrechten Drucke durch widerstehende Kräfte erwiedert werden, welche Drucke auf diese beiden Enden senkrecht auf die Axe durch die Schwungkräfte um diese Axe und durch die äussern Kräfte entstehen; diess ist auch wahr, wenn diese in ihren Enden unterstützte Axe eine in allem Bezuge freie Axe ist (in Bezug auf Schwungkräfte und äussere Kräfte), wo aber dann die Unterstützung in beiden Enden der Axe = 0 ist, d. h. der Körper ein frei schwebender Körper ist. Wird demnach ein Körper von wie viel immer äussern Kräften nach den verschiedensten Richtungen bestimmt, welche Kräfte eine Gesammtwirkung haben, deren Richtung nicht durch des Körpers Schwerpunkt läuft, der Körper daher Rotationen unterliegt; lassen sich ferner alle diese Kräfte nach solchen 3 auf einander senkrechten Richtungen α, β, γ, zerlegen, nach welchen Rich-

tungen der Körper drei Axen hat, deren jede eine freie Axe in allen Rücksichten ist, (so dass es eine Axe gibt parallel zu α, welche frei ist, sowohl in Bezug aller Kräfte nach γ und β als in Bezug der Schwungkräfte der um diese Axe laufenden Elemente, eben so, dass es eine Axe gibt parallel zu b, ...) und ist der Körper ein frei schwebender Körper, so erfolgt seine Rotation um jene in aller Rücksicht freien Axen, welche mit α, β, γ, parallel laufen, zu gleicher Zeit. Jede dieser 3 in allen Rücksichten freien Axen kann aber nie eine andere als eine Hauptaxe d. h. als eine solche seyn, welche blos durch die Schwungkräfte der um sie laufenden Elemente bei jeder Winkelgeschwindigkeit solche Drucke erleidet, die einander dergestalt aufheben, dass diese Axe durch diese Schwungkraft so viel wie gar keinen Druck erleidet. Es muss aber diese Axe darum nicht eine in aller Rücksicht freie Axe seyn, wenn sie eine Hauptaxe ist. Betrachten wir z. B. die Axe α', welche mit α parallel läuft, so sind entweder die nach γ und β wirkenden Kräfte = o oder endlich; im ersten Falle ist α' eine in aller Rücksicht freie Axe nur dann, wenn sie eine Hauptaxe ist; im letzten Falle besteht um α' entweder Gleichgewicht zwischen den Kräften nach α und β oder nicht; besteht Gleichgewicht, so kann α nur dann eine in aller Rücksicht freie Axe seyn, wenn sie blos in Rücksicht auf Schwungkräfte frei ist, und wenn zugleich die nach γ und β wirkenden Kräfte auf α' solche senkrechte Drucke (§. 78.) ausüben, die einander aufheben [denn hier ist angenommen, dass die nach γ und β wirkenden Kräfte beständig fort nach einerlei Richtung relative auf eine ausserhalb dem Körper liegende unbewegliche Linie wirken, ohne sich mit dem Körper herum zu drehen. Im letzten Falle liesse sich freilich eine in allen Rücksichten beständig freie Axe f denken, welche keine Hauptaxe wäre, z. B. (Taf. V. Fig. 13.) bei dieser physischen Scheibe vom Gewichte M ist die in o durch die Scheibe senkrecht gesteckte Axe eine Hauptaxe, gesetzt nun es wirkten in c und d nach den Tangenten die gleich grossen Kräfte c und d; es drehte sich die Scheibe um m, und es liefen die Kräfte c, d, mit herum, so dass man nach irgend einer Zeit folgende Lage erhielte, (Taf. V. Fig. 14.) so bestünde um m zwischen c, d, Gleichgewicht, daher um m gleichförmige Winkelgeschwindigkeit γ, der beständige Druck auf m nach mk wäre $= c + d$ (§. 78.) und nach mo $= \frac{\gamma^2}{2g} \cdot mo \cdot M$ (§. 74.) wäre nun gerade $c + d = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot mo \cdot M$, so wäre während der ganzen Rotationsbewegung m eine in aller Rücksicht freie Axe; laufen aber die Kräfte c, d, nicht mit herum,

so ist der Gesammtdruck auf m beständig ein anderer, nemlich in der Lage nach $mo = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot mo . M$ (Taf. V. Fig. 16.) und nach $mk = c + d$, hingegen in der Lage (Taf. V. Fig. 15.) nach $mo = \frac{\gamma^2}{2g} \cdot mo . M$ und nach $mk = c + d$], besteht kein Gewicht um α' zwischen den Kräften nach γ und β, so läuft der sich um [α' bewegende Körper mit ungleichförmiger Winkelgeschwindigkeit herum, heisst daher] binnen dt die Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$ der Abstand der Axe α' vom Schwerpunkte des Körpers $= E$, des Körpers Gewicht $= M$, so ist der Druck auf die Axe nach dem Schwerpunkte hin $= \frac{\gamma^2}{2g} . E . M$, und alle an die Axen gesetzten Drucke durch die äussern Kräfte mögen binnen $dt = K$ seyn, also hat der binnen den verschiedenen dt aus $\frac{\gamma^2}{2g} . E . M$ und K entstehende Gesammtdruck einen andern Werth. Sey er also auch für irgend ein $dt = o$, so ist er es doch nicht für ein anders dt, nur in jenem Falle kann der auf α' durch die Schwungkräfte und die äussern Kräfte bestehende Gesammtdruck $= o$ seyn, wenn die Schwungkräfte allein auf α' solche Drucke äussern, welche zusammen die Axe α' gar nicht drücken, d. h., wenn α' eine Hauptaxe ist, und wenn zugleich die auf α' blos durch die äussern Kräfte γ und β entstehende Drucke soviel wie nichts drücken. Was hier von α' gesagt wurde, gilt eben so von den Axen β' und γ', welche mit β und γ parallel genommen werden, in Bezug der Drucke auf α' und γ' durch die Schwungkräfte der um β' und γ' laufenden Elemente, und in Bezug der Kräfte α und γ, dann jener α und β.

Ad S. 110. Z. 28. $\int$ heisst hier blos Summe, nicht Integrale; $\int x\,dM$ heisst die Summe aller x dM, welche im ganzen Körper enthalten sind

Ad S. 110. Z. 30. Man muss die Sache hier so betrachten. Die Ebene BAC, so wie die Axe der x, jene der y, jene der z nemlich AB, AC, AD, und der Anfangspunkt A der Abscissen x werden sämmtlich als unbeweglich angesehen, was auch der Körper für Bewegung sowohl fortschreitend als rotatorisch gemacht haben mag; es ändern sich also die Koordinaten x, y, z, eines und desselben Elements Z (dessen Gewicht = dM) bei jeder Bewegung des Körpers. Eben so ändern sich bei jeder Bewegung des Körpers die Koordinaten e, f, h, welche die jedesmalige Lage des Schwerpunktes des Körpers bestimmen.

Ad S. 111. Z. 1. Auch hier heisst $\int$ nur Summe. Es ist $\frac{dx\,dM}{M}$ seinem Geiste nach so zu verstehen: Nennen wir dM, dM', dM'', dM''', ... die verschiedenen Elemente von 3 unendlich kleinen Dimensionen des Körpers, dessen Schwerpunkt zu Ende der Zeit t in G ist, und seyen x, x', x'', x''', ... deren (auf AB von A aus gemessene) entsprechende Abscissen, so ist:

$$e = \frac{x\,dM + x'dM' + x''dM'' + x'''dM''' + \ldots\ldots}{M}$$

Da nun hier alles einem steten Gesetze der Stetigkeit unterliegend genommen wird, so ist e eine Funktion von t, also de jenes Nullinkrementum, worum e wächst, wenn t um dt zunimmt, eben so nehmen x um dx, x' um dx', x'' um dx'', ... binnen dt zu; aus derselben Ursache als zu Ende t war

$$e = \frac{x\,dM + x'dM' + x''dM'' + x'''dM''' + \ldots\ldots\ldots}{M}$$

muss zu Ende t + dt seyn

$$e + de = \frac{(x + dx)\,dM + (x' + dx')\,dM' + (x'' + dx'')\,dM'' + (x''' + dx''')\,dM''' + \ldots\ldots}{M}$$

woraus folgt:

$$de = \frac{dx\,dM + dx'dM' + dx''dM'' + dx'''dM''' + \ldots\ldots}{M}$$

welche Kürze halber durch $de = \int \frac{dx\,dM}{M}$ angezeigt wird; eben so

Ad S. 111. Z. 3. Man stellt sich nemlich hier die Sache so vor: Es mögen binnen dt auf den Körper wie viel immer Kräfte K, $\overset{+}{K}$, $\overset{++}{K}$, ... nach den verschiedensten Richtungen in beliebigen Angriffspunkten angebracht wirken, so lässt sich jede derselben in 3 gleichgeltende nach AB, AC, AD auflösen, K in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, eben so $\overset{+}{K}$ in $\overset{+}{\mathfrak{P}}$, $\overset{+}{\mathfrak{Q}}$, $\overset{+}{\mathfrak{R}}$, eben so $\overset{++}{K}$ in $\overset{++}{\mathfrak{P}}$, $\overset{++}{\mathfrak{Q}}$, $\overset{++}{\mathfrak{R}}$, eben so

Sey nun die Summe aller nach AB wirkenden Kräfte $\mathfrak{P} + \overset{+}{\mathfrak{P}} + \overset{++}{\mathfrak{P}} + \ldots\ldots = P$, jene der nach AC wirkenden $\mathfrak{Q} + \overset{+}{\mathfrak{Q}} + \overset{++}{\mathfrak{Q}} + \ldots\ldots = Q$, jene der nach AD wirkenden $\mathfrak{R} + \overset{+}{\mathfrak{R}} + \overset{++}{\mathfrak{R}} + \ldots\ldots = R$: so vertheilt sich (wegen des unverschiebbaren Zusammenhangs der Elemente dM, dM', dM'', dM''', ... unter einander) P in die Elemente dM, dM', dM'', ... nach irgend einem Gesetze, so dass

binnen dt diese Elemente dM, dM′, dM″, dM‴, ... nach mit AB parallelen Richtungen die Drucke q, q′, q″, ... und r, r′, r″, r‴, ... Es sind demnach die Elemente, da dM, dM′, dM″, ... binnen dt mit AB, AC, AD parallel die Räume dx, dy, dz, ferner dx′, dy′, dz′, ferner dx″, dy″, dz″, ferner durchlaufen, ddx, ddy, ddz, ferner ddx′, ddy′, ddz′, ferner ddx″, ddy″, ddz″, ferner die doppelten Räume, welche binnen dt von den Elementen dM, dM′, dM″, ... mit AB, AC, AD parallel durchlaufen werden blos durch das Einwirken der Kräfte p, q, r, ferner p′, q′, r′, ferner p″, q″, r″, ferner

Ad S. 111. Z. 5. In $\int p\,dt$ heisst $\int$ so viel als Integrale. Dass aus $ddx = \frac{2gp}{dM} \cdot dt^2$ folge: $dx\,dM = 2g\,dt \int p\,dt$, erhellet hieraus: Es ist dM eine beständige Grösse, wenn von einem und demselben Elemente die Rede ist, und nur dessen x und p am Ende einer gewissen Zeit t betrachtet wird. Ferner ist p eine Funktion von $t = f(t)$. Da x eine Funktion von t ist, so sey $F(t)$ eine solche Funktion von t, dass in unserm Falle $x = \frac{2g}{dM} F(t)$, daher $dx = \frac{2g}{dM} dF(t) = \frac{2g}{dM} F(t') \, dt$ [nach des Hrn. *Lagrange* Bezeichnungsart der ersten abgeleiteten Funktion], und $ddx = \frac{2g}{dM} dt\, d(F'(t)) = \frac{2g}{dM} F''(t)\, dt^2$ (hier ist also $F''(t) = p$). Man erhält aus $ddx = \frac{2g}{dM} dt\,d\,(F'(t))$ die hier Statt findende Gleichung $dx = \frac{2g}{dM} F'(t)\, dt$ wenn man in der Gleichung $ddx = \frac{2g}{dM} dt\,d\,(F'(t))$ so integrirt: $dx = \frac{2g}{dM} dt \int d\,(F'(t))$, also führt diese Art von Integration auf richtiges Resultat. Ist demnach $ddx = \frac{2g}{dM} p\,dt^2$ oder $ddx = \frac{2g}{dM} dt \cdot p\,dt$, so führt folgende Integration auf richtiges Resultat: $dx = \frac{2g}{dM} dt \int p\,dt$, also ist $dx.\,dM = 2g\,dt \int p\,dt$.

Ad S. 111. Z. 9. In $\int dx\,dM$ heisst $\int$ Summe, in $2g\,dt \int P\,dt$ heisst $\int$ Integrale.

Ad S. 111. Z. 11. Unterscheiden wir den Ausdruck Summe von jenem Integrale durch die Bezeichnungen $\mathfrak{S}$ und S, so haben wir $\mathfrak{S}\, dx\, dM = 2g\, dt \int P dt$; in eben dem Sinne haben wir $de = \frac{\mathfrak{S}\, dx\, dM}{M}$. Dass aus $de = \frac{\mathfrak{S}\, dx\, dM}{M}$ folge $dde = \frac{2 g P dt^2}{M}$, erhellet hieraus: Es ist $e = \frac{\mathfrak{S} x . dM}{M} = \frac{1}{M}$ (xdM + x′dM′ + x″dM″ + x‴dM‴ + ...), daher:

$$de = \frac{1}{M} (dx\, dM + dx'\, dM' + dx''\, dM'' + \ldots\ldots)$$

da dM, dM′, dM″, ... beständige Grössen sind; man kann aber auch dM = dM′ = dM″ annehmen, dann ist:

$$de = \frac{dM}{M} (dx + dx' + dx'' + dx''' + \ldots\ldots), \text{ also:}$$

$$dde = \frac{dM}{M}\, d\,(dx + dx' + dx'' + dx''' + \ldots\ldots).$$

Nun ist dx + dx′ + dx″ + ... nichts anders als die Summe aller jener Räume, welche binnen dt von dM, dM′, dM″, ... zu gleicher Zeit nach irgend einer angenommenen Ordnung zusammen, so ist klar, dass die Reihe der Glieder dx, dx′, dx″, dx‴, ... irgend einem Gesetze der Stetigkeit unterliegen, und dass das letzte Glied das Differenzial der Summe dx + dx′ + dx″ + ... sey. Das folgt hieraus: Man stelle sich eine (irgend einem steten Gesetze unterliegende) Kurve MN (Taf. VII. Fig. 4.) von H nach N in die Theile dx, dx′, dx″, dx‴, dx⁗ getheilt vor, so ist HS = dx + dx′ + dx″ + dx‴ + dx⁗; nun ist dx⁗ = d. HS = d (dx + dx′ + dx″ + dx‴ + dx⁗); denn HS ist eine Funktion von AX = X, wächst also um d. HS, wenn X um dX wächst, dX ist von beliebiger Grösse, man mache es = aX, so ist SN = d. HS, aber auch SN = dx⁗ wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NSK und Sbg. Wir haben also, wenn wir in der Reihe: dx + dx′ + dx″ + dx‴ + ... das letzte Glied = dx nennen, $dde = \frac{dM . dx}{M}$. Es folgt aber aus $dde = \frac{dM . dx}{M}$ und $dde = \frac{dM}{M}\, d\, \mathfrak{S}\, dx$ (da $de = \frac{dM}{M} (dx + dx' + dx'' + \ldots) = \frac{dM}{M}\, \mathfrak{S}\, dx$) $dx = x\, \mathfrak{S}\, dx$, aber $dx = d \int dx$, also $\mathfrak{S}$ in $de =$

$\frac{dM}{M}$ $\mathfrak{S}\,dx = \frac{\mathfrak{S}\,dM\,dx}{M}$ dieselbe Bedeutung als $\int$, es folgt also aus $\mathfrak{S}\,dx\,dM = 2g\,dt \int P\,dt$, $\int dx\,dM = 2g\,dt \int P\,dt$, also $dx\,dM = 2g\,dt\,P\,dt$, es ist demnach $dde = \frac{dx.\,dM}{M} = \frac{2g\,P\,dt^2}{M}$.

Ad S. 111. Z. 16. Wäre die Masse M im Schwerpunkte konzentrirt, und wären in diesem Schwerpunkte unmittelbar die Kräfte P, Q, R, (nach AB, AC, AD wirkend) angebracht: und wir nennen de, df, dh die vom Schwerpunkte binnen dt durchlaufene Räume, so wären (§. 16.) $dde = \frac{2gP}{M}\,dt^2$, $ddf = \frac{2gQ}{M}\,dt^2$, $ddh = \frac{2gR}{M}\,dt^2$; also hätten dann dde, ddf, ddh dieselben Werthe als im Falle, wo P, Q, R binnen dt nicht im Schwerpunkt angebracht wären, sondern der Körper nach (§. 93.) von den Kräften $K, \overset{+}{K}, \overset{++}{K} \ldots$ angegriffen wäre.

In beiden Fällen ist also die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts nach AB, AC, AD, also auch die daraus kombinirte fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts nach einer Richtung dieselbe. Der Fall der im Schwerpunkte angebrachten Kräfte P, Q, R nach AB, AC, AD, wird aber nicht geändert, wenn man sich im Schwerpunkte statt P, Q, R angebracht vorstellt, nach AB wirkend $\mathfrak{P} + \overset{+}{\mathfrak{P}} + \overset{++}{\mathfrak{P}} + \ldots$, nach AC wirkend, $\mathfrak{Q} + \overset{+}{\mathfrak{Q}} + \overset{++}{\mathfrak{Q}} \ldots$, nach AD wirkend $\mathfrak{R} + \overset{+}{\mathfrak{R}} + \overset{++}{\mathfrak{R}} \ldots$, oder statt dieser die kombinirten Kräfte aus $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, aus $\overset{+}{\mathfrak{P}}, \overset{+}{\mathfrak{Q}}, \overset{+}{\mathfrak{R}}$, aus $\overset{++}{\mathfrak{P}}, \overset{++}{\mathfrak{Q}}, \overset{++}{\mathfrak{R}}, \ldots$ nemlich (der Richtung und Grösse nach ausgedrückt) $K, \overset{+}{K}, \overset{++}{K}, \ldots$. Man vergesse nicht, dass $K, \overset{+}{K}, \overset{++}{K}, \ldots\, \mathfrak{P}, \overset{+}{\mathfrak{P}}, \overset{++}{\mathfrak{P}}, \ldots, \mathfrak{Q}, \overset{+}{\mathfrak{Q}}, \overset{++}{\mathfrak{Q}}, \ldots\, \mathfrak{R}, \overset{+}{\mathfrak{R}}, \overset{++}{\mathfrak{R}}, \ldots$ P, Q, R sich nur auf jedes dt beziehen, worauf sich de, df, dh beziehen.

Ad S. 113. Z. *letzte*. In (§. 95.) bedeutet $\int$ nicht Integral sondern blos Summe. Es folgt aus (§. 83.) für sämmtliche Drucke auf die Axen in A und F im Falle (§. 95.) I. nach $FA = V.\,\sin\theta$; II. In A. 1) $AM = \frac{a-u}{a}\,W = 0$, 2) $Aa =$

$\frac{f V}{I} \int z\,d M - \frac{f V}{I.k} \int x z\,d M + \frac{\vartheta \vartheta}{2g} \int y\,d M -$

$\frac{\vartheta \vartheta}{2kg} \int x y\,d M.$ [k hat hier und (§. 84.) verschiedene Bedeutungen]

$= \frac{V.h.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\theta}{I} \int z\,d M - \frac{V.h.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\theta}{I.k} \int x z d M + \frac{\vartheta \vartheta}{2g} \int y d M -$

$\frac{\vartheta \vartheta}{2kg} \int x y d M,$ 3) $A\alpha = \frac{f.V}{I} \int y\,d M - \frac{f.V}{I.k} \int x\,y\,d M +$

$\frac{\vartheta \vartheta}{2g} \int z\,d M - \frac{\vartheta \vartheta}{2kg} \int x z\,d M = \frac{V.h.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\theta}{I} . \int y\,d M -$

$\frac{V.h.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\theta}{I.k} \int x y\,d M + \frac{\vartheta \vartheta}{2g} \int z\,d M - \frac{\vartheta \vartheta}{2kg} \int x z d M,$ 4) $\frac{b}{a}. U =$

$V.\,tang\,\eta.\,Sin\,\theta.\,Cos\,\theta.$ III. In F. 1) $BN = \frac{u}{a} W = V.\,Cos\,\theta.$ 2) $B - n =$

$\frac{V.h.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\theta}{k.I} \int x z\,d M - \frac{\vartheta \vartheta}{2kg} \int x y\,d M,$ 3) $\beta + v =$

$\frac{V.h.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\theta}{k.I} \int x y\,d M + \frac{\vartheta \vartheta}{2kg} \int x z\,d M,$ 4) $\frac{b}{a} U =$

$V.\,tang\,\eta.\,Sin\,\theta.\,Cos\,\theta.$ Blos allein durch Vu erleidet die Axe die Drucke I, II, 4) III, 4) $V\,Sin\,\theta$ nach FA, $Ff = Aa = V.\,tang\,\eta.\,Sin\,\theta.\,Cos\,\theta.$ Blos allein durch Vv erleidet sie die auf AF senkrechten Drucke in A und F in der Ebene eFA nach einerlei Richtung *sub* II. 1.), III. 1). Die Drucke *sub* II. 2) 3) und III. 2) 3) beziehen sich blos auf die durch die Schwungkräfte der um AF laufenden Elemente mit Winkelgeschwindigkeit ϑ ausgeübten Drucke in Kombination mit jenen Drucken, welche die fingirten Elementarkräfte auf die Axe ausüben, und zwar nach auf AF senkrechten Richtungen in den Punkten A und F, welche Richtungen *sub* II, 2) III, 2) mit y und jene *sub* II. 3) III. 3) mit z parallel laufen, wobei jedoch zu bemerken kömmt, dass, da AF eine Hauptaxe ist, d. h. die Schwungkräfte zusammen auf AF keinen Druck ausüben (§. 85.) in den Ausdrücken II. 2) 3) III. 2) 3) die Glieder, worinn ϑ enthalten = o sind (§. 81. 82. 83.). Es sind also die in A und F auf AF senkrechten Drucke mit y und z parallel durch die fingirten Elementarkräfte =

$\frac{f V}{I} \int z\,d M - \frac{f V}{Ik} \int x z\,d M = \frac{f.V}{I.k} \int (k - x)\,z\,d M = Ab$ und

$\frac{fV}{l} \int y\,dM - \frac{fV}{lk} \int xy\,dM = \frac{f.V}{l.k} \int (k-x)\,y\,dM = A\alpha$, ferner $\frac{f.V}{l.k} \int xz\,dM = Fe$ (e kann über oder unter AE seyn, muss gar nicht in der AE liegen) und $\frac{f.V}{l.k} \int xy\,dM =$ senkrecht $= V \, Cos\,\theta = Fm$ (Taf. VII. Fig. 5.) und $= \frac{V.\,Sin\,\theta.\,VF}{AF} = \frac{V.\,Sin\,\theta.\,Sin\,\eta}{Cos\,\eta.\,Sec\,\theta} = Fn$, welche zusammen eine Gesammtkraft $= Fl$ (der Richtung und Grösse nach) geben. Fm und Fn liegen in jener Ebene, welche durch F auf AF senkrecht gedacht wird. Als die Kraft V ihren Angriffspunkt in 𝔅 hatte, so bestunden auf F die Drucke (in derselben Ebene als Fm und Fn nemlich beide auf AF senkrecht) nach $Fe =$
$\frac{V.\,Cos\,\theta\,(K - E\,Sin\,\theta)}{K} = \frac{V.\,Cos\,\theta\,(h\,Cos\,\eta\,Sec\,\theta - E\,Sin\,\theta)}{h\,Cos\,\eta\,Sec\,\theta}$ und nach
$Fi = \frac{\mathfrak{A}.\,V\,Sin\,\theta}{k} = \frac{V\,Sin\,\theta\,\sqrt{h^2\,Sin^2\eta + E^2\,Cos\,\theta}}{h\,Cos\,\eta\,Sec\,\theta} = \ldots\ldots\ldots$
wenn $nFi = Arc:\,tang\,\frac{E\,Cos\,\theta}{h\,Sin\,\eta}$ ist. Nun ist $\frac{sn}{nF} = tang\,sFn =$
$\frac{E\,Cos\,\theta}{h\,Sin\,\eta}$ oder $\frac{sn.\,h.\,Cos\,\eta.\,Sec.\,\theta}{V.\,Sin\,\theta.\,h.\,Sin\,\eta} = \frac{sn.\,Cos\,\eta}{V.\,Sin\,\eta.\,Sin\,\theta.\,Cos\,\theta} = \frac{E.\,Cos\,\theta}{h.\,Sin\,\eta}$,
woraus $sn = \frac{V.\,E.\,Cos^2\,\theta\,Sin\,\theta}{h.\,Cos\,\eta}$; ferner ist $sl = nl - ns =$

$$\left(1 - \frac{E.\,Cos\,\theta.\,Sin\,\theta}{h.\,Cos\,\eta}\right) V.\,Cos\,\theta =$$

$$\left(\frac{h.\,Cos\,\eta - E\,Cos\,\theta\,Sin\,\theta}{h\,Cos\,\eta}\right) V.\,Cos\,\theta =$$

$$\left(\frac{h.\,Cos\,\eta.\,Sec\,\theta - E\,Cos\,\theta\,Sin\,\theta\,Sec\,\theta}{h.\,Cos\,\eta.\,Sec\,\theta}\right) V\,Cos\,\theta =$$

$$\left(\frac{h.\,Cos\,\eta.\,Sec\,\theta - E\,Sin\,\theta}{h.\,Cos\,\eta.\,Sec\,\theta}\right) V\,Cos\,\theta,$$

also die nach Fe wirkende Kraft $= sl = Fp$. Es ist ferner $Fs =$
$\sqrt{sn^2 + Fn^2} = \sqrt{\frac{E^2.\,Cos^4\,\theta.}{h^2} + \frac{Sin^2\,\eta}{Sec^2\,\theta}}.\,\frac{V.\,Sin\,\theta}{Cos\,\eta} =$

$\frac{V \cdot \text{Sin}\,\theta}{h \cdot \text{Cos}\,\eta \cdot \text{Sec}\,\theta} \sqrt{h^2 \text{Sin}^2 \eta + E^2 \text{Cos}^2 \theta}$, also ist Fs die Kraft, womit F nach Fi gedrückt wird. Es folgt aber aus den hier bestimmten Werthen der nach Fe nnd Fi wirkenden Kräfte im Falle des Angriffspunktes der Kraft V in 𝔙 der Gesammtdruck auf F = F l, also derselbe Gesammtdruck, als da V seinen Angriffspunkt in V hatte.

Ad S. 114. Z. 4. Das heisst, es bestünde dann nicht mehr Rotation blos um AF, sondern es gäbe mehrere Rotationen zugleich, welche sich auf eine einzige Rotation um eine andere Axe als AF reduziren liessen. Dass der schwebende Körper, dessen Schwerpunkt in A ist, durch die in F auf AF senkrechten Kräfte, welche alle auf eine einzige (auf AF senkrechte in F angebrachte) Gesammtkraft reduzirt werden können, wenn diese Gesammtkraft nicht = o wäre, der Körper um eine Axe sich bewegen müsste, welche durch A liefe, folgt hieraus: Diese Rotation müsste um eine Axe geschehen, welche in Rücksicht dieser Gesammtkraft und in Rücksicht der Schwungkräfte um diese Axe eine freie Axe wäre (§. 92.), eine solche Axe ist aber allemal eine Hauptaxe (§. 92.), also eine solche, die durch A läuft (§. 76.)

Ad S. 114. Z. 22. Bewiesen ist durch §. 95. und §. 96. unmittelbar folgendes: Der auf die durch den Schwerpunkt A des Körpers gelegte Ebene 𝔈″ senkrecht wirkende Druck V kann nur dann dem frei schwebenden Körper eine Rotation um eine beständige Axe AF (nebst einer fortschreitenden Bewegung des Körpers A, welche Bewegungen während der ganzen Wirkungszeit von V ungleichförmig seyn müssen) für die Dauer der Wirkung von V sowohl als für jene Zeit, wo die durch V ertheilten Bewegungen nunmehr durch Trägheit fortdauern werden, ertheilen 1) wenn AF eine Hauptaxe ist, 2) wenn zugleich AF in der Ebene 𝔈″ liegt und so durch den Schwerpunkt A läuft, dass AF mit jener AR einen rechten Winkel bildet, welche AR durch A und den Durchschnittspunkt R der Ebene 𝔈″ mit der Richtung der Kraft V läuft. Hieraus folgt aber auch folgendes: Ist AF jene Axe, welche den so eben *sub* 1) und 2) erwähnten Bedingnissen unterliegt, so kann der Körper mittelst V um keine andere Axe als um AF eine beständige Rotation behaupten, er wird sich also um AF beständig drehen; denn würde er um andere Axen durch immerwährendes Wechseln von Rotationsaxen sich drehen (dessen Unmöglichkeit noch nicht erwiesen wurde), so würde die Wirkung von V unnützerweise komplizirter seyn, als sie nothwendig seyn muss, welches den allgemeinen Natur-

gesetzen zuwider wäre, dass Wirkung und Ursache allemal die einfachsten Wege befolgen.

Gesetzt nun, es sey die in der Ebene $\mathfrak{E}''$ oder EABE liegende durch den Schwerpunkt A laufende auf AR senkrecht stehende Axe AC eine Hauptaxe, so dass also V, nach VR senkrecht auf $\mathfrak{E}''$ wirkend, eine beständige Rotation um AC nebst einer fortschreitenden Bewegung des Schwerpunkts A bewirken, so folgt weiter, was (§. 96.) im letzten Absatze gesagt ist, sehr richtig.

Ad S. 114. Z. 28. Also (§. 16.) $h d\varphi = g. P. dt^2$, worin P die bewegende Kraft V getheilt durch das Gewicht jener Masse ist, welche hier als konzentrirt im Angriffspunkte von V angenommen werden darf. Nun ist es (Elementar-Statik-Mechanik §. 196.) für die Beschleunigung um AC durch P dasselbe, ob alle dM, dM′ um r, r,′ von AC entfernt bestehen, oder ob alle diese dM, dM′, ... gar nicht existiren, statt ihrer aber in V eine Masse $= \frac{r^2 dM}{h^2} + \frac{r^2 dM'}{h^2} + \ldots\ldots =$ $\frac{r^2 dM + r'^2 dM' + \ldots\ldots}{h^2} = \frac{\int r^2 dM}{h^2} = \frac{I}{h^2}$ sich befindet, also ist hier $P = \frac{Vh^2}{I}$, dann ist $h d\varphi = \frac{g.\ V.\ h^2}{I} \cdot dt^2$, oder $d\varphi = \frac{gh.\ V dt^2}{I}$. Nennen wir V′ den Bogen *pro radio* = 1, den der Körper um AC binnen der Zeit t hier durchläuft, also dV′ jenen Bogen *pro radio* = 1, den er binnen dt um AC im Ganzen durchläuft: so ist (§. 16.) $dd\gamma' = 2 d\varphi = \frac{2 gh.\ V dt^2}{I}$. Nun ist V′ eine Funktion von t, $\gamma' = f(t)$, also $d\gamma' = f'(t)\ dt$, $dd\gamma' = f''(t)\ dt^2$ (nach Herrn La Grange Bezeichnungsart, und da dt als beständiges Nullinkrementum angenommen ist), oder $\gamma' = f(t)$, $d\gamma' = f'(t) dt$, $dd\gamma' = dt d\,(f'(t))$, setzt man $d\gamma' = dt \int d\,(f'(t))$, so erhält man $d\gamma' = dt\ f(t)$, und hieraus $\gamma' = \int f'(t)\ dt = \int d f(t) = f(t)$ sehr richtig, also ist der Schluss aus $dd\gamma' = f''(t)\ dt^2$ auf $d\gamma' = dt \int f''(t)\ dt$ richtig, also folgt aus $dd\gamma' = \frac{2 gh.\ V}{I}\ dt^2$, $d\gamma' = \frac{2 gh.\ V}{I} \cdot dt \int dt = \frac{2 gh.\ V}{I}\ dt.\ t = \frac{2 gh.\ V}{I} \cdot t dt + C dt$. (Höhere Analysis S. 1274.) Hieraus ist $\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{2 gh.\ V}{I}\ t + C$, aber $d\gamma' = v dt$ wenn v die Endesgeschwindigkeit des Endpunktes vom *radius* = 1 zu Ende der Zeit t ist, also $\frac{d\gamma'}{dt} = v =$

$\frac{2gh.V}{I}$ t + C, nehmen wir den Körper vor dem Ergriffenwerden durch die Kraft V in Ruhe an, und zählen t vom ersten Augenblicke dieses Ergriffenwerdens an, so ist v = o wenn t = o ist, also C = o, hieraus folgt $d\gamma' = \frac{2gh.V}{I}$ tdt, woraus man erhält $\gamma = \frac{2gh.V}{I} \frac{t^2}{2} + N$, aber für t = o, = Ff (die Längen Aa und Aa, eben so Ff und Ff sind im dritten und vierten Absatze des §. 95. in verschiedenen Bedeutungen genommen). Diese vier hier angeführten Drucke Ab, Aα, ferner Fe, Ff sind die (§. 95.) im letzten Absatze bestimmten (Zeile 5, 6, 7 von unten hinauf gezählt). Die (§. 95.) *sub* 1) 2) 3) 4) enthaltenen Ausdrucke sind jene, welche in dieser Erläuterung *sub* II. 1) III. 1), *sub* II. 4), *sub* III. 4), *sub* I enthalten sind. Es muss für die unbezweifelte und allgemeine Richtigkeit des §. 95. folgendes als sehr wichtig bemerkt werden. Seite 113. Z. 3 und 19. bestimmen die Bedingniss, unter welcher allein das hier Gesagte wahr ist: Der Angriffspunkt V der Kraft VR ist senkrecht über der durch A auf die Richtung VR senkrecht gelegten Ebene BAE um RV = EF entfernt, wo EF durch die freie Axe AF, die aus dem Schneidepunkte R auf AE gezogene Senkrechte, und die aus E gezogene Senkrechte EF auf AE bestimmt wird. Zeile 6. sagt zwar VR = V, indessen wäre das folgende auch wahr, wenn V > oder < VR wäre. Hieraus könnte man glauben, alles folgende sey nur dann wahr, wenn gerade der Angriffspunkt der Kraft V in V sey, so dass RV = EF ist. Allein die Bedingniss des Angriffspunkts der Kraft V im Punkte V (wodurch VF auf der Ebene EAF senkrecht steht) schränkt den Fall keineswegs ein, sondern wurde blos zur leichtern Auflösung der Aufgabe angenommen; denn ob der Angriffspunkt der in der Linie $\alpha\beta$ (Taf. VIII. Fig. 4.) wirkenden Kraft V in V oder einen andern Punkt von $\alpha\beta$ angenommen wird, so hat dieses weder auf die Rotation um AF noch auf die Drucke, welche die verschiedenen Punkte der Axe erleiden, gar keinen Einfluss. Stellen wir uns AF als eine in den Punkt A und F gehaltene Axe vor, so sieht man folgendes ein: nur die Kraft $\gamma \cos\theta$ bewirkt Rotation; die Rotationsbeschreibung hängt also blos vom statischen Momente der $V \cos\theta$ um AF und vom Trägheitsmomente der um AF laufenden Masse ab (höhere Statik, Mechanik 1810. §. 36.). Hieran wird aber nichts geändert, wo der Angriffspunkt der Kraft V in der $\alpha\beta$ immer seyn mag, wenn γ nur immer nach $\alpha\beta$ wirkt. Dass die Drucke auf AF durch die Schwungkräfte nicht geändert werden, wo auch besagter Angriffspunkt V in der $\alpha\beta$ seyn mag, folgt daraus, dass die Winkelge-

schwindigkeit um AF allemal auf einerlei Art zunimmt (Astr. §. 73.), wo sich immer der Punkt V befindet. Hieraus folgt aber zugleich, dass die fingirten Elementarkräfte, um den Axendruck durch $V v = V \cos\theta$ zu finden, dieselben bleiben, wo immer V in der $\alpha\beta$ angebracht seyn mag, daher deren Axendrucke keine Veränderung durch die Veränderung des Angriffspunkts der Kraft V in der $\alpha\beta$ erleiden. Dass endlich sowohl der Unterstützungspunkt A als jener F einerlei Drucke an Richtung und Grösse blos durch die Kraft erleide, wo deren Angriffspunkt in der $\alpha\beta$ immer liegen mag, wenn nur V allemal nach $\alpha\beta$ wirkt, beweise ich so. Manchem wird es ohne fernere Auseinandersetzung einleuchten, dass wenn die unbeugsame undehnbare Linie $\alpha\beta$ in einem Punkt γ ergriffen und nach $\alpha\beta$ gezogen wird, *eo ipso* ein anderer Punkt γ' derselben $\alpha\beta$ nach $\alpha\beta$ mit der Kraft γ gezogen werde, man also als gleichgeltend den einen oder den andern Angriffspunkt annehmen dürfe. Ich will indessen (zum Beweise der Uebereinstimmung unter den bisher aufgestellten Sätzen) zeigen, dass dieses auch aus vorhergehendem Paragraphen folge. Ich spreche blos von F, da von A ganz dasselbe zu sagen wäre. Die $\alpha\beta$ liegt in der durch V parallel mit der Ebene EAF gelegten Ebene $\mathfrak{E}$; wo immer in $\alpha\beta$ der Angriffspunkt der Kraft V (die ein für allemal auf $\alpha\beta$ wirkt) angenommen wird, so lässt sich diese Kraft allemal in die in der Ebene liegenden Kräfte $V\cos\theta$ und $V\sin\theta$ zerlegen, deren erste mit Fe, letztere mit FA parallel wirkt. Allemal entsteht aus $V\sin\theta$ ein Druck auf die Axe AF nach $AF = V\sin\theta$ (§. 77.); es kömmt also nun mehr darauf an, jene Drucke allgemein (ihren Richtungen und Grössen nach) zu bestimmen, welche in F auf AF senkrecht durch $V\cos\theta$ und $V\sin\theta$ entstehen, wo immer der Angriffspunkt von V in der $\alpha\beta$ seyn mag. Sey dieser Angriffspunkt in $\mathfrak{B}$ und nennen wir $V\mathfrak{B} = E$, so bestehen in der Ebene $\mathfrak{E}$ die mit FA und Fe parallel wirkenden im Punkte E angebrachten Kräfte $V\sin\theta$ und $V\cos\theta$. Legt man durch die Richtung der $V\cos\theta$ eine Ebene, welche auf AF senkrecht steht, so schneidet sie die AF in einem Punkte a, so dass $aF = E\sin\theta$ ist, also übt $V\cos\theta$ auf F nach Fe den Druck $= \frac{V \operatorname{Cos}\theta\,(K - E\sin\theta)}{K}$ aus. Legen wir durch V und AF eine Ebene, dann durch $\mathfrak{B}$ und AF eine Ebene, so bilden diese beiden Ebenen in AF den Winkel $= \text{Arc. tang.}\, \frac{E.\cos\theta}{h.\sin\eta}$; der senkrechte Abstand der Kraft $V\sin\theta$ von der Axe ist =

$$\frac{\text{h. in } \eta}{\text{cos. Arc. tang. } \frac{E \cos \theta}{h. \sin \eta}} = \frac{E. \cos \theta}{\text{sin. Arc. tang. } \frac{E \cos \theta}{h. \sin \eta}} = \sqrt{h^2. \sin^2 \eta + E^2 \cos^2 \theta}.$$

Hieraus folgt: Als die Kraft V ihren Angriffspunkt in V hatte, so bestunden auf F die Drucke nach Fe und auf Fe $V' = o$ (da wir den Körper vor dem Ergriffenwerden durch V als in Ruhe annehmen) also $V' = \frac{g. h. V t^2}{I}$, wenn t in Sekunden ausgedrückt ist, V′ also der in t Sekunden durchlaufene Bogen *pro radio* = 1 ist, so ist der in einer Sekunde durchlaufene Bogen *pro radio* = 1, nemlich $V = \frac{g. h. V}{I} = \frac{g. h. V}{\int r r d M}$. Das hier Gesagte ist nur wahr, wenn V eine beständige Grösse ist, d. h. die nach VR wirkende Kraft beständig dieselbe bleibt.

Ad S. 114. letzte Zeile. Ist s′ der binnen der Zeit t von M durchlaufene Raum, so folgt aus $dds' = 2\sigma$, wo σ der Raum ist, den M blos durch das Einwirken von V binnen dt durchläuft, ohne den Raum mit zu rechnen, den M durch seine Trägheit binnen dt nebst σ beschreibt, oder $dds' = \frac{2V}{M} g dt^2$, auf ähnliche Art als eben gezeigt wurde (bei $dd\gamma' = \frac{2g. h. V}{I}. dt^2$) $ds' = dt. \frac{2g. V}{M} t = 2g \frac{V}{M} t dt + C dt$, also $\frac{ds'}{dt} = \frac{2g. V}{M} t + C$, aber $\frac{ds'}{dt} = v$ [wenn v die Endesgeschwindigkeit von M zu Ende der Zeit t ist], also $v = \frac{2g. V}{M} t + C$, nun ist für $t = o$ auch $v = o$, also ist $C = o$, daher $ds' = \frac{2g. V}{M} t dt$, woraus $s' = \frac{2g. V}{M} \frac{t^2}{2} + K$, aber für $t = o$ ist $s' = o$, also $K = o$, daher $s' = \frac{g. V}{M} t^2$, also in der ersten Zeiteinheit oder Sekunde der durchlaufene Raum $s' = s = \frac{g. V}{M}$. Hier ist wieder als nothwendige Bedingniss angenommen, dass V beständig sey.

Es bleibt alles in den Paragraphen 95 und 96 unverändert dasselbe, wenn V statt beständig als veränderlich angenommen wird. Nur der letzte Absatz des (§. 96.) erleidet hiedurch eine Veränderung. Ist V nach einem steten Gesetze veränderlich, so ist $d\varphi =$

$\frac{g.\,h}{I}\,V\,dt^2$, worin V eine Funktion von t ist. $V = f(t)$ oder $t = f(V)$, also $d\varphi = \frac{g.\,h}{I}\,f(t)\,dt^2$, zugleich ist $ddV' = 2\,d\varphi = \frac{2\,g.\,h}{I}\,f(t)\,dt^2$, also ist $d\gamma' = \frac{2\,g.\,h}{I}\,dt\int f(t)\,dt = \frac{2\,g.\,h}{I}\,dt.\,f^+(t) + C\,dt$, woraus $\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{2\,g.\,h}{I}\,f^+(t) + C$, oder $v = \frac{2\,g.\,h}{I}\,f^+(t) + C$, für $t = o$, $v = o$, also $C = -\frac{2\,g.\,h}{I}\,f^+(o)$, also $d\gamma' = \frac{2\,g.\,h}{I}\,(f^+(t) - f^+(o))\,dt$, woraus $\gamma' = \frac{2\,g.\,h}{I}\int(f^+(t) - f^+(o))\,dt$, worin die Konstante so zu bestimmen ist, dass $\gamma' = o$ werde für $t = o$; erhielte man solchermassen $V' = \frac{2\,g.\,h}{I}\,F(t)$, so ist $\gamma' = \frac{2\,g.\,h}{I}\,F(f(v)) = \frac{2\,g.\,h}{I}\,F^+(v)$ durch V ausgedrückt. Auf ähnliche Art als (beim veränderlichen V) hier der binnen der Zeit t vom Endpunkte des *radius* = 1 um AC durchlaufene Raum γ' bestimmt wurde, ist der binnen derselben Zeit t (im Falle des veränderlichen V) vom Schwerpunkte A durchlaufene Raum s' zu bestimmen.

Ad S. 115. *Z.* 27. Man bemerke hier: Es ist die Dauer des Stosses als unendlich klein, daher, damit der Stoss eine endliche Tangentialgeschwindigkeit und Rotationsgeschwindigkeit bewirken könne, V als unendlich gross angenommen. Da (§. 96.) $v = \frac{d\gamma'}{dt} = \frac{2\,g.\,h.\,V}{I}.\,t$ und $\mathfrak{v} = \frac{ds'}{dt} = \frac{2\,g.\,V}{dt}.\,t$ sind, so ist dann für $t = \omega.\,o$ und $V = \frac{\alpha'}{o}$, $v = \frac{2\,g.\,h}{I}\,\alpha'.\,\omega$ und $\mathfrak{v} = \frac{2\,g.\,\alpha'.\,\omega}{M}$, also sind beide in unendlich kleiner Zeit erlangte Endesgeschwindigkeiten endlich. Es ist aber der binnen der unendlich kleinen Dauer $\omega.\,o$ des Stosses vom Schwerpunkte der Erdmasse M durchlaufene Raum mit beschleunigter Bewegung unendlich klein, nemlich $s' = \frac{g.\,V}{M}\,t^2 = \frac{g.\,\alpha'}{M.\,o}\,\omega^2.\,o^2 = \frac{g.\,\alpha'}{M}\,\omega^2.\,o$, daher man die Erde zu Anfange und zu Ende des besagten Stosses in einem und demselben Standpunkte annehmen muss.

Ad S. 116. Z. 4. Das in den Zeilen 5, 6, ... bis 16. des (§. 98.) Gesagten ist undeutlich. Es lässt sich aber das dort gefundene Resultat auf folgende Art erhalten. Wir hatten (§. 96.) $v = \frac{2\,g.\,h.\,V}{I}\,t$ und $\mathfrak{v} = \frac{2\,g.\,V}{M}\,t$; wenn nemlich V während der

Zeit t gewirkt hat, und der Körper vor der Wirkung von V in Ruhe war, so hatte am Ende dieser Zeit t derselbe die Rotationsbewegung um seine beständige Rotationsaxe mit der gleichförmigen Geschwindigkeit V des Endpunkts des Radius $= 1$, und dessen Schwerpunkt hatte am Ende dieser Zeit t die gleichförmig fortschreitende Geschwindigkeit $= \mathfrak{v}$, d. h. am Ende der Zeit t und in allen folgenden Augenblicken (vermöge der Trägheit) bestanden im Körper folgende zwei Bestimmungen: für den Endpunkt des Radius $= 1$ um der beständigen Rotationsaxe in jeder Zeiteinheit den Bogen v, dann für den Schwerpunkt des Körpers in jeder Zeiteinheit gerade fort den Raum $\mathfrak{v}$ beschreiben. Nehmen wir nun den Ursprung der freien Rotation um eine beständige Axe und der fortschreitenden Bewegung in der Bahn mittelst einer anfänglichen Tangentialgeschwindigkeit in dieser Bahn bei einem Planeten auf ähnliche Art an, als diess bei der Erde (§. 97.) angenommen wurde, nemlich durch das Wirken der Kraft V binnen der Zeit t; kennen wir dieses Planeten in jeder Zeiteinheit durchlaufenen Bogen a. c (Bahn als kreisförmig betrachtet, welches approximative bei den Planetenbahnen um die Sonne angenommen werden darf) und den in jeder Zeiteinheit durchlaufenen Bogen *pro radio* $= 1$ um dessen beständige Rotationsaxe $= V$, so ist (da ein nach gerader Linie laufender Körper mit Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, wenn er nach einer Kurven zu laufen genöthigt wird, welche durch besagte gerade Linie am Abweichungspunkte tangentirt wird, seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in dieser Kurven beibehält) $ac = \mathfrak{v}$ und $\gamma = v$ oder $a.\,c = \frac{2g.\,V}{M}\,t$ und $\gamma = \frac{2g.\,h.\,V}{I}\,t$. Nun folgt aus $T.\,c = 2\pi$ und $\tau\gamma = 2\pi$, $F : \tau = \gamma : c$, oder $\frac{T}{\tau} = \frac{\gamma}{c} = \frac{h.\,a.\,M}{I}\,\frac{\alpha}{a}$ (da $I = \int rr\,dM = \frac{2}{5} M\alpha\alpha$ (§. 91.)) $= \frac{5}{2}.\,\frac{h.\,a}{\alpha\alpha}$, woraus $\frac{h}{\alpha} = \frac{2}{5}\,\frac{T}{\tau}.\frac{\alpha}{\alpha}$.

Hier war V und t unbestimmt, alles hier Gesagte bleibt also auch wahr für $V = \frac{\alpha}{o}$ und $t = \omega.\,o$.

Ad S. 116. Z. 9. Das in dieser letzten Zeile Gesagte ist offenbar falsch, es soll so heissen: Die Gleichung $a.\,c = \mathfrak{v} = \frac{2g.\,V}{M}\,t$ giebt $\frac{V}{M} = \frac{a.\,c.}{2g.\,t}$, worin $\frac{V}{M}$ die beschleunigende Kraft ist, womit während der Dauer des Stosses die Masse M, nemlich der Planet fortgetrieben wurde, so dass wenn er durch die Attraktion der Sonne von seiner geraden Bahn nicht abgelenkt worden wäre, er in der ersten Zeiteinheit seiner

aus dem Ruhestande angefangenen Bewegung nach der geraden Bahn den Raum g. $\frac{V}{M}$ durchlaufen hätte; zugleich ist $\frac{a.\ c}{2g.\ t} = \frac{v}{2g.\ t}$ der Quotient aus der am Ende der Zeit t erlangten Endesgeschwindigkeit eines an der Oberfläche frei aus dem Ruhestande herabfallenden Körpers in jene Endesgeschwindigkeit, welche der Planet am Ende der eben so grossen Zeit t (welche Zeit t zugleich die Dauer des Stosses V bedeutet), und zwar beim Aufhören des Stosses hatte, vor welchem Stosse er sich in Ruhe befand, und welche Endesgeschwindigkeit zugleich jene ist, womit er nun (approximative) gleichförmig in seiner (approximative) kreisrunden Bahn läuft.

Ad S. 116. Z. 11. Das ist so zu verstehen: ac ist eine blosse Länge, [heisst also nicht (wenn z. B. ein Fuss als Längeneinheit angenommen ist) a Fuss multiplizirt mit c Fuss, denn diess gebe a. c Fuss], so oft genommen als ein Fuss in der Länge a enthalten ist, oder es heisst (was eben so viel heisst) a Fuss c mal genommen, d. h. a Fuss so oft genommen als 1 Fuss in der Länge c Fuss enthalten ist, also ist c jene Zahl (nicht Länge) welche anzeigt, wie oft ein Fuss in der Länge c Fuss enthalten ist, wo c in jeder Sekunde durchlaufene Fusszahl des Endpunkts des ersten Fusses des Bahnhalbmessers ist. Nun ist aber, wenn oh (Taf. 6. Fig. 7.) = a Fuss, on = 1 Fuss, ng = c Fuss ist, c die Zahl, welche anzeigt, wie oft on in ng enthalten ist, eben so oft ist os in sr enthalten; es ist also überhaupt c die Zahl, die man erhält, wenn man den in jeder Sekunde von einem beliebigen Punkte s (des Bahn-Halbmessers M) beschriebenen Bogen sr durch die Entfernung os dieses Punkts von o (worum der Planet im Kreise herumläuft) dividirt, wobei es gleichgültig ist, durch welche Längeneinheit man sr und zugleich os misst. Denn nimmt man beim Messen von sr und so als Längeneinheit an, z. B. 1 Fuss, so sey die Länge sr = f Fuss, und jene os = F Fuss; nimmt man als Längeneinheit an 1 Klafter, so ist die Länge sr = f $\frac{1}{6}$ Klafter = $\frac{f}{6}$ Klafter, und jene os = F. $\frac{1}{6}$ Klafter = $\frac{F}{6}$ Klafter, im ersten Falle ist $\frac{sr}{os} = \frac{f}{F}$, im zweiten Falle ist $\frac{sr}{os} = \frac{\frac{1}{6}f}{\frac{1}{6}F} = \frac{f}{F}$. Also bleibt c dieselbe Zahl, wenn ich in $\frac{sr}{so}$ sowohl bei der Länge sr als bei jener os als Längeneinheit annehme die Länge oh.

Ad S. 116. Z. 15. Das ist so zu verstehen: Nennt man α die Länge des Erdhalbmessers und ω die Sonnen-Horizontal-Parallaxe an der Erde, α und ω durch einerlei

beliebige Längeneinheit ausgedrückt, z. B. durch Klafter, so dass α und ω die Zahlen sind, welche andeuten, wie oft eine Klafter in der Länge des Erdhalbmessers und in der Länge jenes Bogens *pro radio* = 1 Klafter, der die Sonnen-Horizontal-Parallaxe an der Erde ist, enthalten ist; nennt man ferner $\mathfrak{E}$ die Entfernung der Erd- und Sonnen-Centra von einander in Klaftermaasse, so ist $\alpha : \omega = \mathfrak{E} : 1$, also $\mathfrak{E} = \frac{\alpha}{\omega}$ Klafter. Steht in den astronomischen Tafeln die Entfernung des Centrums eines Planeten vom Centro der Sonne in Erdbahn-Halbmesser = a, d. h. ist a jene Zahl, die andeutet, wie oft der Erdbahn-Halbmesser in der Entfernung des Planetencentrums vom Sonnencentro enthalten ist, so gibt die Zahl a mit der Zahl $\mathfrak{E}$ oder jener $\frac{\alpha}{\omega}$ multiplizirt jene Zahl, die andeutet, wie oft eine Klafter in der Entfernung des Planetencentrums vom Sonnencentro enthalten ist, d. h. die Zahl a multiplizirt mit der Zahl $\mathfrak{E} = \frac{\alpha}{\omega}$ gibt die Entfernung des Planetencentrums vom Sonnencentro in Klafter ausgedrückt. In der Gleichung $\frac{V}{M} = \frac{a.\ c.}{2\,g.\ t}$ ist a nicht gerade die Zahl, welche andeutet, wie oft der Erdbahn-Halbmesser in der Entfernung des Planetencentrums vom Sonnencentro enthalten ist, sondern es ist a diese Entfernung durch beliebige Längeneinheit, und g durch dieselbe Längeneinheit ausgedrückt, es ist ferner g der Fallraum in der ersten Zeiteinheit an der Erdoberfläche, und t ist die Dauer des Stosses V am Planeten von der Masse M in denselben Zeiteinheiten ausgedrückt. So könnte z. B. V und M in Pfunden, a, g, in Klaftern, t in Sekunden ausgedrückt seyn, c ist eine blosse Zahl (wie schon erklärt worden). Substituirt man in $\frac{V}{M} = \frac{a.\ c}{2\,g.\ t}$ statt der Zahl a jene $a.\frac{\alpha}{\omega}$, so ist diess so zu verstehen, dass a zwar als einerlei Länge aber als zweierlei Zahlen genommen wird, und es ist die Gleichung $\frac{V}{M} = \frac{a.\frac{\alpha}{\omega}.\ c}{2\,g.\ t}$ richtig, da $a.\frac{\alpha}{\omega}$ dieselbe Zahl ist als a wenn in $a.\frac{\alpha}{\omega}$ das a in Erdhalbmessern, das α und ω in Klaftern, hingegen in a das a blos in Klaftern ausgedrückt ist. Hätten wir die Längen α und ω statt in Klaftern in Rhein. Fussmaasse bestimmt, so wäre die Länge a in Rhein. Fussmaasse $= a.\frac{\alpha}{\omega}$.

Die Gleichung $\frac{V}{M} = \frac{a.\ c}{2g.\ t}$ bleibt richtig, wenn die Längen a und g in Rheinl. Fussmaasse, und t in Sekunden ausgedrückt ist, daher wenn g den Fallraum an der Erdoberfläche in der ersten Sekunde ausdrückt, seyen V und M in beliebigem, nur in einerlei Gewichtmaasse bestimmt, diese Gleichung bleibt dann auch wahr; so: $\frac{V}{M} = \frac{a.\ \frac{\alpha}{\omega}.\ c}{2g.\ t}$, worin a die Länge a in Erdhalbmesser, α, ω, g, die Längen α, ω, g, in Rheinl. Fussmaasse, t in Sekunden ausgedrückt sind; es ist aber $\frac{\alpha}{g} = 1300368$, wenn α und g in Rheinl. Fussmaasse und g sich auf die erste Sekunde bezieht, es folgt also aus $\frac{V}{M} = \frac{a.\ \alpha.\ c}{2\,\omega\ g\,t}$ folgendes $\frac{V}{M} = 1300368.\ \frac{a.\ c}{2\,\omega\ t}$, worin c eine blosse Zahl, ω in Rheinl. Fussmaasse, t in Sekunden, a in Erdhalbmessern, V und M in beliebigem Gewichtmaasse ausgedrückt sind, und zwar bedeutet V die Stosskraft an Druckgrösse, M das Gewicht des Planeten, t die Dauer des Drucks von V auf M, a die Entfernung des Planetencentrums vom Sonnencentro (die Planetenbahn als kreisförmig angenommen), ω die Sonnen-Horizontal-Parallaxe an der Erde (nemlich ω Bogen *pro radio* = 1 Rheinl. Fuss), ω als Zahl betrachtet ist, aber dann nichts anders als jene Zahl, welche andeutet, wie oft ein Rheinl. Fuss in der Länge des Bogen ω enthalten ist, also ist ω jene Zahl welche man erhält, wenn man durch die Entfernung des Erdcentrums vom Sonnencentro den Erdhalbmesser dividirt, man mag diese beiden Längen in was immer für einem Längenmaasse ausdrücken; endlich ist c jene Zahl welche man erhält, wenn man den in jeder Sekunde beschriebenen Bogen eines Punkts des Planeten-Bahn-Halbmessers um das Sonnencentrum durch die Entfernung dieses Punkts vom Sonnencentro dividirt, man mag diese beiden Längen in welch immer einem Längenmaasse ausdrücken. Man bemerke, dass in diesem Paragraphe alles nur approximative und nur dann wahr ist, wenn man den Winkel c, der in jeder Sekunde um das Sonnencentrum beschrieben wird, als sehr klein betrachtet, u. s. w. So ist z. B. strenge genommen $\frac{\alpha}{a}$ nicht der heliocentrische Halbmesser des Planeten; denn es ist (Taf. VIII. Fig. 5.) in P der Planet, n S die Sonne, so ist a S = a, ab = α, also (wenn Sk = 1 ist) $\frac{\alpha}{a} = \frac{ik}{1} = ik$,

aber ik ist nicht der heliocentrische Halbmesser des Planeten P, sondern dieser ist = dem Bogen ko, allein wenn ab gegen aS sehr klein, also aSb sehr klein ist, so weicht ko von ki nur sehr wenig ab, da (höhere Analysis S. 14.) aus $x = \text{tang}\, x - \frac{\text{tang}^3 x}{3} + \frac{\text{tang}^5 x}{5} - \ldots$) $ok = ik - \frac{ik^3}{3} + \frac{ik^5}{5} - \ldots$ $= ik$. Aus der Gleichung $\frac{V}{M} = \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{c}{\omega} \cdot \frac{a}{2t}$, worin V und M in einerlei beliebigem Gewichtmaasse α, g in einerlei beliebigem Längenmaasse, a in Erdhalbmesser, endlich t in jenem Zeitmaasse auszudrücken ist, in deren erster Zeiteinheit auf der Erdoberfläche der Fallraum aus dem Ruhestande = g ist, worin ferner c und ω erwähntermassen blos als Zahlen substituirt werden können, ist $\frac{\alpha}{g}$ nur dann, wenn t in Sekunden ausgedrückt ist, = 1300368, es mögen übrigens α und g in welch immer einem Längenmaasse ausgedrückt seyn. Ist t in einem andern Zeitmaasse ausgedrückt, so sey allgemein $\frac{\alpha}{g} = v$, welcher Werth derselbe bleibt, so lange t in demselben Zeitmaasse bemessen ist, es mögen übrigens α und g in welch immer einem Längenmaasse bestimmt seyn. Wäre z. B. als Einheit der Zeit eine Minute = 60 Sekunden angenommen, so bliebe die Länge α unverändert, aber es wüchse die Länge g um das (60^2)fache oder 3600fache, also wäre $\frac{\alpha}{g} = v = \frac{1300368}{3600}$. Nehmen wir nun an, es werde als Einheit der Zeit die doppelte Dauer des Stosses von V in M angenommen, so ist $t = \frac{1}{2}$, also wenn wir g' den an der Oberfläche in einer solchen ersten Zeiteinheit (aus dem Ruhestande) Statt findenden Fallraum nennen, so ist $\frac{V}{M} = \frac{\alpha}{g}, \frac{c}{\omega} \cdot \frac{a}{2\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{g'} \cdot \frac{c}{\omega} \cdot a$, nennen wir $\frac{\alpha}{g'} = v'$, so ist $\frac{V}{M} = V' \frac{c}{\omega} \cdot a$. Unter diesen Voraussetzungen allein ist die Formel in Herrn Schubert (§. 98.) in der letzten Zeile wahr, worin aber v dasselbe bedeuten muss als hier v', falsch ist sie hingegen, wenn $v = \frac{\alpha}{g} = 1300368$ bedeutet, α, g', ω beziehen sich auf die Erde, hingegen c, a, V, M auf den Planeten, c, ω oben bestimmte Zahlen; a des Planeten Centrums-Entfernung vom Sonnencentro in Erdhalbmesser gemessen.

Alles in (§. 98.) Gesagte ist nur in so ferne wahr, als man annimmt, es bestehe während der Dauer der Wirkung der Kraft V in M keine Attraktion zwischen Sonne

und Planeten, denn nur unter der Voraussetzung der blos durch V hervorgebrachten doppelten Bewegung des Planeten ohne Nebenbestimmung sind die (§. 96.) gefundenen Formeln für die Endesgeschwindigkeiten und Räume bei der Rotations- und Fortschreitungs-Bewegung wahr, welche auf den Fall gar nicht mehr passen, wenn der nach (§. 95, ...) durch V ergriffene Planet durch das Mitwirken der Sonne eine krumme Linie um die Sonne beschreiben soll. Dieser Hypothese über die Art, wie der Schöpfer die Weltkörper zu ihrem jetzigen Zustande brachte, gemäss wären also drei Hauptzustände erforderlich gewesen, 1) Materie ohne Attraktion in Ruhe, 2) Materie ohne Attraktion in beschleunigter fortschreitender und Rotationsbewegungen, 3) Materie mit Attraktion gegeneinander begabt und sich so bewegend, wie sie den Astronomen sich jetzt darbieten. Indess fände ich es mit der Weisheit des Schöpfers, der zu allen Zwecken die einfachsten Mittel wählt, weit vereinbarlicher anzunehmen, dass alles schon in dem Zustande, als wir es wahrnehmen, erschaffen wurde. Den Zustand der Ruhe als ursprünglicher anzunehmen ist eben so willkürlich, als zu behaupten, dass die Geschwindigkeit in jeder Sekunde 3 Fuss der ursprüngliche Zustand der Materie gewesen sey: denn warum nicht lieber o Fuss als 3 Fuss? Ich sehe demnach alles in §. 97 bis 102. Gesagte als blosse Beispiele für Schüler der höhern Mechanik an, daher ich, ihrer Unwichtigkeit wegen, mich in den Erläuterungen über §. 99 bis 101. nur sehr kurz fasse.

Ad S. 116. Z. 27. Das hier Gesagte zu verstehen bemerke man folgendes: Nimmt man an, es habe während der Dauer t des Stosses V im Planeten M schon Attraktion zwischen Sonne und Planeten bestanden, so dass also der Planet während der Zeit t eine krumme Linie beschrieb, wodurch zwar die Rotationsbeschleunigung um die beständige freie Axe des Planeten dieselbe blieb, als wenn besagte Attraktion nicht bestanden hätte (93.) aber die beschleunigte Bewegung in der krummlinigten Bahn anders als im Falle des geraden Fortlaufens ausfallen musste, so kann man sich, ohne hier eben die während der Zeit t durchlaufene Bahn noch die darinn Statt findende beschleunigte Bewegung zu bestimmen, den Lauf des Planeten oberflächlich so bestimmen. Während der ersten unendlich kleinen Zeit t wäre T (Taf. VII. Fig. 8.) für sich allein über Ta, hingegen blos durch die Attraktion über Fi gelaufen, also ist T am Ende der Zeit t' in g. Hier ist (§. 16.) Ta sowohl als Ti ein unendlich kleines der zweiten Ordnung, daher a Tg ein endlicher Abweichungswinkel ist; als T in g ankommt, hat es nach gn und gS die Bestimmungen in folgenden t'' zu durchlaufen gm und gh, durchläuft also go *plus* jenem Stück, dass es vermöge sei-

ner Trägheit und binnen t' gesammelten Geschwindigkeit nach Tg durchläuft; es weicht go von der Richtung Tg nur unendlich wenig ab, da gm von Ta und gi von Ti nur unendlich wenig abweichen, sowohl an Grösse als Richtung; es ist nemlich $Ta = \frac{gV'}{M} t'^2$, $Ti = \frac{gP'}{M} t'^2$, $gm = \frac{g.\ V''}{M} . t''^2$, $gh = \frac{g.\ P''}{M} . t''^2$, woselbst V'' von V' eben so P'' von P' unendlich wenig verschieden sind, u. s. w.

Nimmt man hingegen an, es habe der ganze Stoss nur binnen der unendlich kleinen Zeit $\omega.\ o = t'$ mit einer Stärke $= \frac{\alpha'}{o}$ gedauert, so ist der binnen dieser Zeit nach Ta durchlaufene Raum $= \frac{g.\ \alpha'}{M} .\ a^2.\ o$ ein Unendlichkleines der ersten Ordnung, hingegen der nach Ti durchlaufene Raum $= g \frac{P'}{M} .\ \omega^2.\ oo$ ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung, also der Abweichungswinkel a T g unendlich klein, und der binnen $\omega.\ o$ wirklich durchlaufene Raum $=$

$$\sqrt{\frac{g^2.\ \alpha^2}{M^2} \omega^4.\ o^2 + \frac{g^2\ P'^2}{M^2} \omega^4\ o^4} = \frac{g\alpha'}{M} \omega^2\ o = \sigma,$$

also der Richtung und Grösse nach derselbe, als ob die Attraktion während dem Stosse gar nicht gewirkt hätte. Am Ende des Stosses besteht die Endesgeschwindigkeit nach $Ta =$ (da T von seiner geraden Richtung nicht abgelenkt worden) $= \mathfrak{v} = 2g \frac{\alpha'}{M} \omega$. (§. 96.) $= a.\ c$ [$TS = a$], also bestand für den Endpunkt des *radius* $= 1$ von ST zu Ende des Stosses die Geschwindigkeit $= \frac{2g\alpha'.\ \omega}{a.\ M} = c$, daher ist $\sigma = \frac{a.\ c}{2} \omega.\ o = \frac{a.\ c}{2} t'$, also der binnen $\omega.\ o$ durchlaufene Raum vom Endpunkte des *radius* $= 1$, nemlich $\frac{\sigma}{a} = \frac{c}{2} t'$. Der vom Endpunkt des Radius $= 1$ um T durchlaufene Raum binnen des Stosses $=$ $\frac{g.\ h.\ \alpha'}{I} \omega^2.\ o = 1 = \frac{g.\ h.\ \alpha'}{I} \omega.\ t' = \mathfrak{f}$, ferner ist die Endesgeschwindigkeit desselben Endpunktes am Ende des Stosses $= \frac{2g\ h}{I} \alpha'.\ \omega = \gamma$ [wenn der Pla-

net aus Beobachtungen mit der Winkelgeschwindigkeit um seine Axen läuft], daher $\int = \frac{t'. \gamma'}{2}$. Es hat demnach binnen des Stosses der Punkt C nach Cb und Cc zugleich durchlaufen $\frac{a\,c}{2}\, t'\,(a - x)$ und $\frac{\gamma .\, t'\, x}{2}$, soll also C der ruhig stehende Punkt seyn, um welchen die durch T gedachte Ebene während des Stosses sich dreht, so muss seyn $\frac{c}{2}\, t'\,(a - x) - \frac{\gamma .\, t' .\, x}{2} = o$, also $x = \frac{c.\, a}{\gamma + c}$; da aber c gegen γ bei allen Planeten sehr klein ist (z. B. bei der Erde $\gamma : c = T : \tau = 365 : 1$) so ist approximative $x = \frac{a.\, c}{\gamma}$.

Das hier Gesagte passt auf die wirkliche Bewegung der Planeten gar nicht, da es nur unter der Voraussetzung wahr wäre, dass die Ekliptik des Planeten und dessen Aequatorsebene in einerlei Ebene lägen, welches bei keinem Planeten der Fall ist. Nimmt man es sey die Ebene ST (Taf. VIII. Fig. 7.) die Ebene der Ekliptik des Planeten; (dessen Mittelpunkt in T ist) denkt sich selbige auf der Papiersebene senkrecht, die Planeten-Rotationsaxe hu laufe mit der Ebene des Papiers parallel, bilde aber mit ST in T den Winkel φ, so ist, (wenn ST $= a$, TC $= x$ ist) uC $= x \operatorname{Sin} \varphi$. Hier ist Cu parallel mit der Aequatorsebene TA angenommen. Durch die Bewegung in der Bahn beschreibt C binnen t' den Bogen $\frac{c}{2}\, t\,(a - x)$, und durch die Rotation um hu jenen $\frac{\gamma}{2}\, t'.\, x \operatorname{Sin} \varphi$ rückwärts, also im ganzen jenen $\frac{c}{2}\, t'\,(a - x) - \frac{\gamma}{2}\, t'\, x \operatorname{Sin} \varphi$, steht binnen t' der Punkt C stille, so ist $x = \frac{c.\, a}{c + \gamma .\, \operatorname{Sin} \varphi}$. Hier lässt sich c gegen γ Sin φ nicht allgemein vernachlässigen, indem Sin φ ein kleiner Bruch seyn kann. Würde alles, wie so eben angenommen, mit dem einzigen Unterschiede, dass hu mit der Ebene ST gar keinen vollkommen ruhigen Punkt binnen der Zeit t' gebe; denn jeder Punkt C der Ebene ST beschriebe binnen t' zwei Räume nach verschiedenen Ebenen, welche Räume also einander nicht aufheben könnten. Nur in so ferne könnte C als stille stehend betrachtet werden, als blos dessen Bewegung in der Ebene ST in Anschlag käme, wobei er

sich aber dennoch allemal in der auf S T senkrechten Ebene bewegen müsste, in welchem Falle man die Bewegung des Punktes C durch die Rotation um h u in zwei zerlegen müsste, deren eine in der Ebene S T, die andere auf der Ebene S T senkrecht stünde u. s. w.

Ad S. 117. Z. 3. Das ist so zu verstehen. Wenn man die unbeugsame nicht materielle Ebene, welche durch den Mittelpunkt T (Taf. VII. Fig. 6.) des Planeten besagtermaassen läuft, in einem fixen Punkte aufhängen möchte 1) in C, so dass der Planet unten zu hängen käme, so wäre B (T B = h) derjenige Punkt, in welchem die ganze Masse M des Planeten konzentrirt gedacht, man dieselben Pendelschwingungen (isochronische Schwingungen) um C erhielte, als selbige um C dann vor sich gingen, wenn die Masse M in der Kugel des Planeten gleichmässig verbreitet bliebe; 2) in B (Taf. VI. Fig. 8.) (nemlich mittelst einer in B den Planeten auf der Ebene senkrecht durchlaufenden Axe), so dass C unter B und B um und um mit Masse umgeben wäre, so wäre C jener Punkt, in welchem die ganze Masse M konzentrirt gedacht, man dieselben Pendelschwingungen in B erhielte, als selbige um B dann vor sich gingen, wenn die Masse in der Kugel des Planeten gleichmässig verbreitet bliebe. (Hier ist vorausgesetzt, der Planet erleide diese Aufhängungen über der Oberfläche eines andern Planeten, wodurch alle Elemente gegen den Mittelpunkt des andern Planeten streben, wie alle Körper auf unserer Erde, und dass dieses Streben in allen Elementen gleich gross und der andere Planet unbeweglich sey, unter Voraussetzungen, die nicht Statt finden können, da der Planet so gross ist, dass dessen obere Elemente eine ganz andere Attraktion als dessen untere erleiden werden u. s. w. Alles hier Gesagte passt weit mehr auf den Fall, wo man statt Planet Kugel sagt, und sich in T eine gleichdichte Kugel von mässigen Dimensionen denkt.).

Beweis *ad* 1. (Taf. VII. Fig. 6.). Sey die Masse der Kugel gleichmässig verbreitet, so ist die Summe der Trägheitsmomente um $C = \int rr\,dM$ (um T) $+ M.CT^2 = \int rr\,dM + M.x^2$, also (Elementar-Statik, Mech. §. 160.) die gleichgeltende Masse in T konzentrirt (in Bezug der Beschleunigung um C) $=$ $\frac{\int rr\,dM + Mx^2}{x^2}$. Am Ende der Zeit t bilde das Pendel mit C A, (das zu Anfange von t den Winkel A bildete) den Winkel ψ, die in $\frac{\int rr\,dM + Mx^2}{x^2}$ unmittelbar wirkende bewegende Kraft d t ist also $=$ $M \operatorname{Sin} \psi$, also die beschleunigende Kraft binnen d t $=$

$\frac{x^2 . M . \text{Sin}\, \psi}{\int r r\, d M + M x^2}$, daher (§. 46.) $d v = 2 g\, d t \frac{x^2 M \text{Sin}\, \psi}{\int r r\, d M + M x^2}$;

aber $d s = v d t$, oder $- x d \psi = v d t$, daher:

$v d v = \frac{2 g x^3 M}{\int r r\, d M + M x^2} - d \psi\, \text{Sin}\, \psi$, also $v^2 =$

$\frac{4 g x^3 M}{\int r r\, d M + M x^2} (\text{Cos}\, \psi - \text{Cos}\, A)$.

Wäre M nicht in der Kugel vertheilt, sondern im Punkte B konzentrirt angenommen, so wäre, wenn zu Ende t das Pendel mit CA den Winkel φ bilden möchte, die beschleunigende Kraft $= \frac{M \text{Sin}\, \varphi}{M} = \text{Sin}\, \varphi$, also $v'^2 = 4 g (x + h) (\text{Cos}\, \varphi - \text{Cos}\, A)$, also für $\varphi = \psi$, $v'^2 = 4 g x (\text{Cos}\, \psi - \text{Cos}\, A)$. Sollen nun in beiden Fällen die Pendel mit einander isochronisch schwingen, so muss seyn $v : v' = x : x + h$, oder $v^2 : v'^2 = x^2 : (x + h)^2$, oder $\frac{x^3 . M}{\int r r\, d M + x^2 M} : (x + h) = x^2 : (x + h)^2$, woraus $x + h = \frac{\int r r\, d M + x^2 M}{x M} = \frac{M . h^2 + \int r r\, d M}{M h}$, da $x = \frac{2}{5} \frac{\alpha^2}{h} = \frac{\int r r\, d M}{M . h}$ ist.

Beweis *ad* = 2. (Taf. VI. Fig. 8.). Sey die Masse M in der Kugel gleichmässig verbreitet, so ist die Summe der Trägheitsmomente um die Axe B $= \int r r\, d M$ (um der Axe T) $+ M . h^2$, also die in T als konzentrirt gedachte gleichgeltende Masse $=$ $\frac{\int r r\, d M + M . h^2}{h^2}$, zu Ende t ist dann die beschleunigende Kraft $=$ $\frac{M . \text{Sin}\, \psi . h^2}{\int r r\, d M + M h^2}$, also $d v = \frac{2 g\, M . h^2}{\int r r\, d M + M h^2} \text{Sin}\, \psi . d t$. aber $d s = v d t$, oder $- h d \psi = v d t$, also $v^2 = \frac{4 g M h^3}{\int r r\, d M + M . h^3} (\text{Cos}\, \psi - \text{Cos}\, A.)$

Wäre M in C konzentrirt, so wäre, (wenn zu Ende t das Pendel mit BC den Winkel φ bilden möchte) binnen d t die beschleunigende Kraft $=$ $\frac{M \text{Sin}\, \varphi}{M}$, also $v'^2 = 4 g (x + h) (\text{Cos}\, \varphi - \text{Cos}\, A)$, also für $\varphi = \psi$, $v'^2 = 4 g (x + h) (\text{Cos}\, \psi - \text{Cos}\, A)$. Soll nun in beiden Fällen das Pendel auf

einerlei Art schwingen, so muss seyn $v : v' = h : h + x$, $v^2 : v'^2 = h^2 : (h + x)^2$,

also $x + h = \frac{\int rr\,dM + Mh^2}{Mh}$

Ad S. 119. Z. 8. Dass diese geringe Abweichung der Konzentrirungspunkte der Attraktion der Planeten von ihren Schwerpunkten (also von den Mittelpunkten bei gleich dichten regelmässig abgeplatteten Sphären) auf die fortschreitende Bewegung ihrer Schwerpunkte in ihren Bahnen einen so geringen Einfluss habe, dass dieser Einfluss ganz aus der Rechnung bleiben darf, so dass man bei Betrachtung der blos fortschreitenden Bewegung in der Bahn approximative auch bei den unvollkommenen Sphären annehmen darf, als konzentrirte sich die Attraktion jedes anziehenden Himmelskörpers gegen den andern in des letztern Schwerpunkte, mit eben der Stärke, als ob beide sphärisch wären; dass aber diese Approximation nicht für jenen Fall Statt finden könne, wenn vom Einflusse der benannten geringen Abweichung der Konzentrirungspunkte auf die Rotation die Rede ist, beruht auf dem mathematischen Axiome, dass in der Approximationsrechnung eine Grösse gegen eine weit grössere aber nicht gegen eine gleiche oder wohl gar kleinere Grösse verschwinden könne. Ein sehr kleiner Bruchtheil kann gegen 0 nicht verschwinden, wohl aber gegen eine ganze Zahl. Die Bahn eines Planeten um die Sonne hängt, bei gegebener ursprünglichen Tangentialgeschwindigkeit, blos von der beschleunigenden Kraft ab, in Bezug auf Richtung und Grösse, womit in jeder Entfernung der Mittelpunkte, der Mittelpunkt des Planeten gegen die Sonne strebt. Betrachtet man also die Abweichung (gegen die Bahn bei vollkommenen Sphären), welche blos dem Umstande zuzuschreiben ist, dass Sonne, Planet, und andere den Planeten noch anziehende Himmelskörper etwas weniges von der Sphäre verschieden sind, so kann diese Abweichung nur in so ferne bestehen, als durch das Abgehen von der sphärischen Gestalt bei einer gegebenen Lage der Mittelpunkte der Sonne, des Planeten und der den Planeten anziehenden Himmelskörper die beschleunigende Kraft des Schwerpunkts des Planeten in Bezug auf Richtung und Grösse eine Abänderung erleidet; man sieht aber leicht ein, dass der Unterschied zwischen dieser beschleunigenden Kraft im Falle der vollkommenen Sphären und im Falle der nicht vollkommenen Sphären (da die Abweichungen von der Sphäre geringe sind) eine unbedeutende Grösse gegen die im Falle der vollkommenen Sphären schon bestehende beschleunigende Kraft des Planetenmittelpunkts seyn könne, sowohl in Bezug auf Grösse als auf Richtung; daher sich denken lässt, dass man approximative einen Fall für den andern annehmen dürfe,

nach welcher Annahme gerechnet, man auf richtige Resultate wirklich gelangt. Betrachtet man hingegen den Einfluss der Attraktion der Sonne auf den Planeten blos in Bezug auf Rotation, so ist der Fall der vollkommenen Sphäre mit jenen der (auch noch so wenig) abweichenden Gestalt von der Sphäre nicht als gleichgeltend zu nehmen möglich; denn konzentrirt sich bei einer angenommenen Lage der Mittelpunkte der Sonne, des Planeten und der anziehenden Himmelskörper alle Attraktion auf den Planeten im Mittelpunkte des Planeten, so ist der Einfluss dieser Kraft auf die Rotation des Planeten = o (§. 70, 71, 72.); konzentrirt sich hingegen diese Kraft nicht im Mittelpunkte, so kann zwar der Abstand des Konzentrirungspunkts vom Schwerpunkt des Planeten ein sehr kleiner Bruchtheil seyn, indessen ist ein sehr kleiner Bruchtheil (auch nur approximative genommen,) mit o nie als gleichgeltend zu nehmen. Man vergesse hier folgende Bemerkung nicht: nur die in jedem Punkte der Planetenbahn für dessen Mittelpunkt bestehende beträchtliche Tangentialgeschwindigkeit berechtigt uns, den Fall der sphärischen Gestalt von Sonne, Planeten und anziehenden Himmelskörpern mit jenen der geringen Abweichung von der Sphäre zu vereinigen, und das darum: Sey bei einer bestimmten Lage des Planeten gegen die Sonne und die übrigen anziehenden Körper einmal alles als sphärisch, einmal als nicht sphärisch betrachtet, in beiden Fällen aber des Planeten Tangentialgeschwindigkeit in dem Augenblicke der Betrachtung dt eine und dieselbe PC (Taf. VIII. Fig. 6.) sowohl in Bezug auf Richtung, als in Bezug auf Grösse, so folgt in Bezug der Attraktion blos eines der anziehenden Körper K auf den Planeten P: (P, K Schwerpunkte), wenn im ersten Falle die beschleunigende Kraft vom P nach PK = Pg ist, so hat P die Bestimmung binnen dt zu durchlaufen, nach $PC = g . Pg'' \, dt^2 = g . \frac{Pg . \sin g}{\sin g''} dt^2$, nach $PR = g . Pg' . dt^2 = g . Pg . \frac{\sin KPC}{\sin g''} dt^2$.

Wenn im zweiten Falle P nach PU die beschleunigende Kraft = Pq hat, so hat P die Bestimmung dt zu durchlaufen, nach $PC = g . Pq'' . dt^2 = C + g . \frac{Pq . \sin (KPC + g'' - \varphi) \, dt^2}{\sin . g''}$ nach $PR = g . Pq' . dt^2 = g . \frac{Pq . \sin (KPC - \varphi) \, dt^2}{\sin g''}$.

Wären in demselben Sinne in Bezug auf P und $\overset{+}{K}$, auf P und $\overset{++}{K}$, ... die Bestimmungen von P binnen dt: nach PC, im ersten Falle =

$$g \cdot \frac{P \cdot \overset{+}{g} \cdot \operatorname{Sin} \overset{+}{g}\, dt^2}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''},\ g \cdot \frac{P \cdot \overset{++}{g} \cdot \operatorname{Sin} \overset{++}{g}}{\operatorname{Sin} \overset{++}{g}}\, dt^2, \ldots\ldots\ldots$$ im zweiten Falle

$$= g \cdot P \overset{+}{q} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(K \overset{+}{P} C + \overset{+}{g}'' - \overset{+}{\varphi})\, dt^2}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''},$$

$$g\, \overset{++}{P} q \cdot \frac{\operatorname{Sin}(K \overset{++}{P} C + \overset{++}{g}'' - \overset{++}{\varphi})\, dt^2}{\operatorname{Sin} \overset{++}{g}''}$$ und nach P R im ersten Falle

$$g. P. \overset{+}{g}. \frac{\operatorname{Sin} K \overset{+}{P} C}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''}\, dt^2,\ g. \frac{\overset{++}{P} g. \operatorname{Sin} \overset{++}{K} P C. dt^2}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''}, \ldots\ldots\ldots$$

im zweiten Falle $g. \frac{P \overset{+}{q}. \operatorname{Sin}(K \overset{+}{P} C - \overset{+}{\varphi})\, dt^2}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''},$

$$g. \frac{\overset{++}{P} g. \operatorname{Sin}(K \overset{++}{P} C - \overset{++}{\varphi})\, dt^2}{\operatorname{Sin} \overset{++}{g}''}, \ldots\ldots\ldots$$

so wäre im ganzen die Bestimmung von P, binnen dt zu durchlaufen: nach P C, im ersten Falle =

$$\left(P C + \left(\frac{P g. \operatorname{Sin} g}{\operatorname{Sin} g''} + \frac{P \overset{+}{g}. \operatorname{Sin} \overset{+}{g}}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''} + \frac{P \overset{++}{g} \operatorname{Sin} \overset{++}{g}}{\operatorname{Sin} \overset{++}{g}''} + \ldots\ldots\ldots\right) g\, dt\right) dt = \mathfrak{A},$$

im zweiten Falle $= \Big(P C + \Big(P q. \frac{\operatorname{Sin}(K P C + g'' - \varphi)}{\operatorname{Sin} g''} +$

$$P \overset{+}{q}. \frac{\operatorname{Sin}(K \overset{+}{P} C + \overset{+}{g}'' - \overset{+}{\varphi})}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''} +$$

$$\overset{++}{P} q. \frac{\operatorname{Sin}(K \overset{++}{P} C + \overset{++}{g}'' - \overset{++}{\varphi})}{\operatorname{Sin} \overset{++}{g}''} + \ldots\ldots \Big) g\, dt\Big) dt = a,$$

Nach P R, im ersten Falle $= \left(\frac{P g. \operatorname{Sin} K P C}{\operatorname{Sin} g''} + \frac{P \overset{+}{g}. \operatorname{Sin} K \overset{+}{P} C}{\operatorname{Sin} \overset{+}{g}''} +\right.$

$$\frac{P\overset{++}{g}.\ \mathrm{Sin}\ K\overset{++}{P}C.}{\mathrm{Sin}\ \overset{++}{g}''} + \ldots\ldots\ldots\ldots) \ g.\ dt^2 = \mathfrak{B};$$ im zweiten Falle =

$$\left(Pq.\ \frac{\mathrm{Sin}\ (KPC - \varphi)}{\mathrm{Sin}\ g''} + P\overset{+}{q}.\ \frac{\mathrm{Sin}\ (K\overset{+}{P}C - \overset{+}{\varphi})}{\mathrm{Sin}\ \overset{+}{g}''}, + \right.$$

$$P\overset{++}{q}.\ \frac{\mathrm{Sin}\ (K\overset{++}{P}C - \overset{++}{\varphi})}{\mathrm{Sin}\ \overset{++}{g}''} + \ldots\ldots\ldots) \ gdt^2 = \mathfrak{b}.$$

Hieraus sieht man: Wenn PC eine endliche Grösse ist, so ist $\mathfrak{A} = PC.\ dt$ und $\mathfrak{a} = PC.\ dt$ also $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}$; wenn nebstbei Pg von Pq, $P\overset{+}{g}$ von $P\overset{+}{q}$ nur sehr wenig verschieden sind, und φ, $\overset{+}{\varphi}$, $\overset{++}{\varphi}$, ... gegen K P C, $K\overset{+}{P}C$, $K\overset{++}{P}C$, ... sehr klein sind, so ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}$. Unter diesen Voraussetzungen also ist der erste mit dem zweiten Falle gleichgeltend. Wäre aber Pq, $P\overset{+}{q}$, $P\overset{++}{q}$, ... von Pg, $P\overset{+}{g}$, $P\overset{++}{g}$, ... noch so wenig verschieden, und φ, $\overset{+}{\varphi}$, $\overset{++}{\varphi}$, ... noch so klein, d. h. würden die beschleunigenden Kräfte Pq, $P\overset{+}{q}$, $P\overset{++}{q}$, ... von jenen Pg, $P\overset{+}{g}$, $P\overset{++}{g}$, ... (der Richtung und Grösse nach) noch so wenig abweichen, und wäre zugleich PC = o, so wäre der erste mit dem zweiten Falle nicht gleichgeltend, da zwar $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}$ aber nicht $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}$ wäre.

Dass die Rotation des Planeten gerade um dessen Schwerpunkt, d. h. um eine beständige Axe oder abwechselnd um verschiedene Axen, welche Axen alle durch den Schwerpunkt laufen, vor sich gehen werde, folgt hieraus: Es wird an der Rotationsbewegung eines Körpers dadurch nichts geändert, dass man in dessen Schwerpunkte was immer für Kräfte anbringt (§. 93.). Ein von was immer für Kräften ergriffener Körper erleidet in seinem Schwerpunkte eine fortschreitende Bewegung, als ob alle diese Kräfte im Schwerpunkte unmittelbar angebracht, und die Masse des Körpers im Schwerpunkte konzentrirt wäre; fingirt man daher im Schwerpunkt eine der mittlern Wirkung dieser Kräfte gleiche und entgegengesetzte Kraft, so bleibt der Schwerpunkt unbeweglich, und es ist durch diese Fiktion an der Rotationsbewegung nichts geändert worden, steht aber der Schwerpunkt stille, so muss die Rotation um ihn geschehen. Es besteht demnach folgender allgemeiner Lehrsatz, welcher eigentlich nichts als ein *Corollarium* des (§. 93, 70 und 71.) ist: Wenn an einem festen Körper, was immer

für Kräfte wie immer angebracht sind, so ist für die fortschreitende Bewegung seines Schwerpunkts dieser Fall mit jenem gleichgeltend, wo alle diese Kräfte zu sich selbst parallel unmittelbar am Schwerpunkte angebracht, und die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte konzentrirt wären; geht die mittlere Richtung aller dieser Kräfte nicht durch den Schwerpunkt, so besteht nebstbei eine rotatorische Bewegung entweder um eine beständige oder veränderliche Axe, doch allemal so, dass die jedesmalige Rotationsaxe durch den Schwerpunkt läuft. Auf die Einwendung, dass die an freischwebenden angebrachten Kräfte zwar Rotation um Axen die durch den Schwerpunkt laufen, bewirken, dass aber diese Rotation eben nicht binnen dt um eine Axe sondern zugleich um mehrere Axen entstehen könne, antworte ich: Man zerlege alle binnen dt wirkende Kräfte nach 3 auf einander senkrechten Koordinaten X, Y, Z, so erhält man 3 Summen von Kräften 𝔵, 𝔶, 𝔷, wo in jeder solchen Summe alle Kräfte mit einer der 3 Koordinaten parallel laufen, z. B. in der Summe 𝔵 mit X parallel u. s. w.; die Kräfte 𝔵 bewirken binnen dt Rotationen um Axen die mit Y und Z parallel, und durch den Schwerpunkt laufen u. s. w., so dass also der Körper binnen dt zu gleicher Zeit sich um 3 mit X, Y, Z parallel laufende im Schwerpunkt sich senkrecht schneidende Axen dreht, welches für dt allemal nur eine Drehung um eine Axe gibt (*vide Prony Architectura hydraulica* §. 154.). Es seyen X A Y (Taf. VIII. Fig. 1.) Z A X (Taf. VIII. Fig. 3.) die denn auf einander senkrechten Ebenen die sich paarweis in den Axen A Y (Fig. 1 und 2.), AZ (Fig. 2 und 3.) und AX (Fig. 3 und 1.) schneiden, so dass A der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Ebenen und der drei Axen sey. Man gedenke sich im Freien einen Punkt, dessen Projektion in M, M′, M″, auf jede der dreien Ebenen getragen sey, und hierzu 3 Koordinaten AP (Fig. 1.) = M″ P′ (Fig. 3.) PM (Fig. 1.) = AN (Fig. 2.) und NM′ (Fig. 2.) = AP′ (Fig. 3.). Man setze, $AP = x$, $PM = y$, $NM' = z$ Winkel MAX (Fig. 1.) = φ, Winkel M′AY (Fig. 2.) = ψ, Winkel M″AZ (Fig. 3.) = ω, alle *pro radio* = 1.

Nun setze man, der Punkt, dessen Projektion sich in M, M′, M″ befindet, drehe sich nach einander um jede der drei Axen:

$\left\{\begin{array}{l} AZ\ \text{Fig. 3.} \\ AX\ -\ 1. \\ AY\ -\ 2. \end{array}\right\}$ wovon er um die Länge $\left\{\begin{array}{l} AM\ \text{Fig. 1.} \\ AM'\ -\ 2. \\ AM''\ -\ 3. \end{array}\right\}$ entfernt sey, und beschreibe einen unendlich kleinen Bogen (*pro radio* $1 = d\varphi,\ d\psi,\ d\omega$),

$\left\{\begin{array}{l} Mm\ \text{Fig. 1.} \\ M'n\ -\ 2. \\ M''t\ -\ 3. \end{array}\right\}$ welcher die Entfernung $\left\{\begin{array}{l} AM\ \text{Fig. 1.} \\ AM'\ -\ 2. \\ AM''\ -\ 3. \end{array}\right\}$ zum Halbmesser

hat; man ziehe auf die Axe $\left\{\begin{array}{l} AX\ \text{Fig. 1.} \\ AY\ -\ 2. \\ AZ\ -\ 3. \end{array}\right\}$ die Parallele und Senkrechte

$\left\{\begin{array}{l} pm,\ mr,\ \text{Fig. 1.} \\ qn,\ ns,\ -\ 2. \\ p't,\ tu,\ -\ 3. \end{array}\right\}$, so geben die ähnlichen Dreiecke $\left\{\begin{array}{l} Mmr,\ MAP,\ \text{Fig. 1.} \\ M'ns,\ M'AN,\ -\ 2. \\ M''ut,\ M''AP',\ -\ 3. \end{array}\right\}$

die Proportion $\left\{\begin{array}{l} Mm : MA = Mr : AP = mr : PM,\ \text{Fig. 1.} \\ M'n : M'A = M's : AN = ns : NM',\ -\ 2. \\ M''t : M''A = M''u : AP' = tu : P'M'',\ -\ 3. \end{array}\right\}$: ferner hat man

hier $\left\{\begin{array}{l} Mm : MA = d\varphi : 1; \\ M'n : M'A = d\psi : 1; \\ M''t : M''A = d\omega : 1; \end{array}\right\}$. (Es versteht sich, dass wie φ, ψ, ω, auch $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$ sich auf den Radius $= 1$ beziehen). Man hat weiter:

$\left\{\begin{array}{l} Mr = dy,\ mr = dx\ \text{Fig. 1.} \\ M's = dz,\ ns = dy.\ -\ 2. \\ M''u = dx,\ ut = dz.\ -\ 3. \end{array}\right\}$ wobei wohl zu merken ist, dass das dy (Fig. 1.) keineswegs dem dy (Fig. 2.) gleich ist, indem sie von Umdrehungsbewegungen um verschiedene Axen herrühren, und eben so verhält es sich mit den andern Differenzialien dx, dz. Wir bemerken über das, dass, da

$\left\{\begin{array}{l} \varphi\ \text{und}\ y\ \text{Fig. 1.} \\ \psi\ \text{und}\ z\ -\ 2. \\ \omega\ \text{und}\ x\ -\ 3. \end{array}\right\}$ zugleich abnehmen $\left\{\begin{array}{l} d\varphi\ \text{und}\ dy\ \text{Fig. 1.} \\ d\psi\ \text{und}\ dz\ -\ 2. \\ d\omega\ \text{und}\ dx\ -\ 3. \end{array}\right.$

einerlei Zeichen haben müssen, das dem von $\left\{\begin{array}{l} dx \text{ Fig. } 1. \\ dy \; - \; 2. \\ dz \; - \; 3. \end{array}\right\}$ entgegengesetzt ist, weil

$\left.\begin{array}{l} x \text{ Fig. } 1. \\ y \; - \; 2. \\ z \; - \; 3. \end{array}\right\}$ wachsen, indess die erstern abnehmen.

Hernach verwandeln sich die Proportionen, welche sich aus den oben gefundenen ähnlichen Dreiecken ergeben: wenn man die analytischen Werthe substituirt und auf die Gleichförmigkeit der Zeichen Acht hat, in folgende:

$$\left\{\begin{array}{ll} -d\varphi : 1 = -dy : x = dx : y & \text{Fig. } 1. \\ -d\psi : 1 = -dz : y = dy : z & \;-\; 2. \\ -d\omega : 1 = -dx : z = dz : x & \;-\; 3. \end{array}\right.$$

welches die Gleichung gibt;

$$\left\{\begin{array}{ll} dy = x d\varphi,\; dx = -y d\varphi & \text{Fig. } 1. \\ dz = y d\psi,\; dy = -z d\psi & \;-\; 2. \\ dx = z d\omega,\; dz = -x d\omega & \;-\; 3. \end{array}\right.$$

Nun setze man die drei elementarischen Umdrehungen $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$, welche wir bis hieher abgesondert haben, sollen alle zugleich Statt finden. Man kann sich dieses leicht gedenken, denn man kann sich vorstellen, der Punkt S, welchen wir im Freien genommen haben, oder welches auf das nämliche hinausläuft, seine Projektion M Fig. 1. drehe sich um den Pnnkt A oder um die Axe AZ, während dieser Zeit bewege sich die Ebene Fig. 1. um die Axe AY wie um ein Gewerbe, und es bewege sich über das in der nämlichen Zeit die Ebene Fig. 2. um die Axe AX senkrecht auf diese Axe. Man begreift leicht, dass in diesem Falle alle jene unendlich viele Punkte, die man sich mit S als unverschiebbar zusammenhängend denkt, auch dreifache Rotationen um AX, AY, AZ machen, deren gleichzeitig beschriebene Bögen *pro radio* = 1 auch $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$; gewisse dieser Punkte sollen zugleich μ, μ', μ'', genannt werden.

Unter dieser Voraussetzung nun der gleichzeitigen dreifachen Umdrehung müssen die daraus für x, y und z sich ergebenden Veränderungen der Summe der einzelnen Veränderungen gleich seyn, welche, mit ihren Zeichen genommen, aus jeder einzelnen Umdrehung entstehen. Denn es ist sowohl aus den Regeln der Differenzialrechnung als aus Betrachtung der Figur klar, dass, da y in dem nämlichen Augenblick um sn (Fig. 2.) wächst, und um Mr (Fig. 1.) abnimmt, seine ganze Verände-

rung su — Mr seyn müsse, und so verhält es sich auch mit den übrigen Koordinaten. Demnach ergibt die Betrachtung der gleichzeitigen dreifachen Umdrehung die Gleichungen:

$$dx = z d\omega - y d\varphi$$
$$dy = x d\varphi - z d\psi$$
$$dz = y d\psi - x d\omega$$

Dieses ist der allgemeine Werth der Veränderungen dx, dy, dz, welche die drei für irgend einen im Freien liegenden Punkt S angenommenen Koordinaten x, y, z leiden, welcher nach denen oben erklärten Bedingungen eine gleichzeitige dreifache Umdrehungsbewegung hat. Man setze irgend einer μ der von vorerwähnten unendlich vielen Punkten liege so, dass dessen AP (Fig. 1.): AP′ (Fig. 3.) = M′n (Fig. 2.): M″t (Fig. 3.): Mm (Fig. 1.) oder dass bei selbigen $x : y : z = d\psi : d\omega : d\varphi$ [$d\psi : d\varphi : d\omega$ ein willkürlich angenommenes beständiges Verhältniss], d. i. für dessen jedesmaligen Standpunkt die verschiedenen Koordinaten x, y, z, proportional seyen den Umdrehungsbögen *pro radio* = 1, $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, welche um jene Axe AX, AY, AZ beschrieben werden, worauf von deren Durchschnittspunkte A an besagte Koordinaten x, y, z gemessen werden. Man setze ferner, ein anderer μ' dieser Punkte liege so, dass von dessen x, y, z ebenfalls behauptet werden könne $x : y : z = d\psi : d\omega : d\varphi$, ferner ein anderer μ'', ..., ferner, so ist leicht zu beweisen, dass die Linie, welche durch alle diese um AX, AY, AZ gleichzeitig die Winkel *pro radio* = 1 $d\psi$, $d\varphi$, $d\omega$, beschreibenden Punkte μ, μ', μ'', μ''', . . . entsteht, 1) eine Gerade sey, welche 2) durch den Anfangspunkt A der Koordinaten durchgeht; denn 1) die Projektion dieser Linie gibt:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{auf der Ebene Fig. 1.} & x : y = d\psi : d\omega \\ \text{– – – – 2.} & y : z = d\omega : d\varphi \\ \text{– – – – –} & z : x = d\varphi : d\psi \end{array}\right\}$$

und die Verhältnisse $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$ werden, wiewohl sie willkürlich sind, doch als unveränderlich angenommen; 2) die beiden Koordinaten in jeder der drei Ebenen sind in dem Punkt A zugleich = o; denn $x = \frac{y d\psi}{d\omega}$ woselbst $\frac{d\psi}{d\omega}$ eine beständige Grösse B, also x = y B, also wenn y = o, so x = o . B = o, ... Da also die drei Projektionen der gedachten Linie gerade Linien sind, die durch den Punkt A durchgehen, so ist die gedachte Linie gleichfalls gerade und geht durch den nämlichen Punkt durch.

Ausserdem geben die Verhältnisse $x : y : z = d\psi : d\omega : d\varphi$, $x d\omega = y d\psi$, $y d\varphi = z d\omega$, $x d\varphi = z d\psi$; diese Werthe in den drei obigen Gleichungen substituirt, gibt $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$; also hat die eben bestimmte Linie die Eigenschaft, oder vielmehr es haben die darinn befindlichen Punkte μ, μ', μ'', ... eine solche Lage, dass die Veränderungen der sich darauf beziehenden Koordinaten, welche von deren gleichzeitigen elementarischen Umdrehungen $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$ herrühren $= 0$ sind. Aber diese Eigenschaft kann nur in sofern Statt finden, als diese Linie die gemeinschaftliche Mittellinie dieser Umdrehungen d. i. die unbewegliche Axe in Ansehung des Systems ist, um welche jene einzige Umdrehung [versteht sich in senkrechten Ebenen auf dieser unbeweglichen Axe] erfolgt, welche aus der Vereinigung dieser Umdrehungen entsteht.

Es reduziren sich also die gleichzeitigen elementarischen Umdrehungen $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$, um besagte 3 Axen auf eine einzige senkrechte Umdrehung $d\theta$ um eine Axe [es bezieht sich $d\theta$ in $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$ auf den Radius $= 1$] die durch den Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z, durchgeht und die Eigenschaft hat, dass für alle dazu gehörige Punkte $x : y : z = d\psi : d\omega : d\varphi$. Umgekehrt kann man eine senkrechte Umdrehung um eine willkürlich angenommene Axe in drei elementarische Umdrehungen um drei auf einander senkrechte Axen zerlegen, die durch irgend einen Punkt der ersten Axe durchgehen, so dass, wenn man diesen Punkt für den Anfangspunkt der Koordinaten ansieht, welche mit den drei ersten Axen gleichlaufend angenommen werden, das Verhältniss dieser drei elementarischen Umdrehungen der unveränderlichen Verhältniss der durch gedachte Axe gehörigen Koordinaten gleich ist.

Hier liesse sich noch einwenden: die Kräfte p müssen nicht eben um die mit Y und Z parallelen Axen Rotationen bewirken, sondern können Rotationen um was immer für Axen hervorbringen, welche in einerlei auf AB senkrechten durch A laufenden Ebenen liegen, worunter freilich auch AC und AD gehören u. s. w.; allein darauf antworte ich: Es mag sich ein Körper um wie viel immer Axen, die sich alle in einerlei Punkte A schneiden, zu gleicher Zeit drehen, so lässt sich allemal die Veränderung seiner Lage durch die zugleiche dreifache Rotation um drei einander in A senkrecht schneidende Axen von beliebiger Lage erhalten (wovon es leicht ist, sich zu überzeugen, unter andern durch einen Erd- oder Himmels-Globen, dem man jede beliebige Lage gegen fixe Punkte im Raume dadurch geben kann, dass man ihn um die Polaraxe dreht); der Fall also, wo ein Körper sich binnen dt um was immer für Axen dreht, die sich in dessen Schwerpunkte schneiden,

ist mit jenem gleichgeltend, wo er sich blos um drei einander im Schwerpunkte senkrecht schneidende Axen dreht, wenn er nur um jede dieser drei Axen binnen dt den erforderlichen Bogen beschreibt. Die Rotation des Körpers durch die Kräfte $\mathfrak{r}$, um welche Axen immer, die durch A laufen, und in der auf AB senkrechten Ebene liegen, sind also drei zugleich bestehende Rotationen um AB, AC, AD; jene um AB ist aber = o, also gibt $\mathfrak{r}$ Rotationen um AC und AD.

Ad S. 120. Z. 1. Es ist bei den Axen AB, AC, AD zu merken: Ist bei der Axe AB die Richtung von A nach B, bei der Axe AC die Richtung von A nach C, bei der Axe AD die Richtung von A nach D, als positiv angenommen, so folgt aus dem Sinne des (§. 103.), dass [wenn in der Axe AE die Richtung von A nach E als positiv angenommen wird) die Geschwindigkeiten nach AE, nemlich: $\frac{e}{r} . y. \text{Cot.}\, \eta = +$, nach AB nemlich $\frac{e}{r}\, y. \text{Cosec}\, \eta = -$, nach AE nemlich $\frac{e}{r}\, z \,\text{Sin}\, \theta = +$, nach AD nemlich $\frac{e}{r}\, z \,\text{Cos}\, \theta = -$ seyen. Man hat also in Z folgende Geschwindigkeiten nach AB = $-\frac{e}{r}\, y. \text{Cosec}\, \eta$, nach AD = $-\frac{e}{r}\, z \,\text{Cos}\, \theta$, nach AE = $\frac{e}{r} . y \,\text{Cot}\, \eta + \frac{e}{r} . z. \text{Sin}\, \theta = h$, oder, da h nach AE gleichgeltend ist, mit folgenden: nach AB = h Cos η und nach AC = h Sin η, so bestehen in Z folgende Geschwindigkeiten nach AB = $-\frac{e}{r} . y \,\text{Cosec}\, \eta + h . \text{Cos}\, \eta$, nach AC = h Sin η, nach AD = $-\frac{e}{r}\, z \,\text{Cos}\, \theta$, oder nach AB = $-\frac{e}{r}\, y. \text{Cosec}\, \eta + \frac{e}{r} (y . \text{Cot.}\, \eta + z \,\text{Sin}\, \theta) \,\text{Cos}\, \eta = -\frac{e}{r} (y \,\text{Sin}\, y - z . \text{Sin}\, \theta . \text{Cos}\, \eta)$, nach AC = $\frac{e}{r} (y \,\text{Cot}\, \eta + z \,\text{Sin}\, \theta) . \text{Sin}\, \eta = \frac{e}{r} (y . \text{Cos}\, \eta + \text{Sin}\, z . \text{Sin}\, \theta . \text{Sin}\, \eta)$, nach AD = $-\frac{e}{r}\, z \,\text{Cos}\, \theta$, oder wenn wir die Richtungen von A nach B, von A nach C, von A nach D, als negativ nehmen, so bestehen in Z zu gleicher Zeit die Geschwin-

digkeiten nach AB $= \frac{e}{r}$ (y. Sin η — z. Sin θ. Cos η) $=$ u, nach AC $=$ $-\frac{e}{r}$ (y. Cos η + z. Sin θ. Sin η) $=$ v, nach AD $= \frac{e}{r}$. z. Cos θ = w. Hier ist also vorausgesetzt, dass AX = X, XY = Y, YZ = Z, negative Grössen sind, d. h. die Koordinaten X, Y, Z, von AB aus, von B nach A, von X aus von Y nach X, von Y aus von Z nach Y positiv genommen werden (wovon (§. 86.) das Gegentheil geschah), welches jedoch der Allgemeinheit dieser Formel für die binnen dt bestehenden Geschwindigkeiten nicht schadet, da sie wahr bleiben, man mag für X, Y, Z was immer für zusammengehörige Werthe substituiren, seyen selbige positiv oder negativ.

Ad S. 120. Z. 7. Denn stehe die Ebene EAK (Taf. VIII. Fig. 8.) auf jener EAE senkrecht, sey AG nach AV = AP, der Radius $= 1$, der Bogen GV $= \lambda$, jener PV $= \mu$, also Gi $= \sin\lambda$, Ai $= \cos\lambda$, Pk $= \sin\mu$, Ak $= \cos\mu$, ki $= \cos\lambda - \cos\mu$, daher $iP^2 = \mathrm{Sin}^2\mu + \mathrm{Cos}^2\lambda - 2\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\mu + \mathrm{Cos}^2\mu = 1 + \mathrm{Cos}^2\lambda - 2\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\mu$; verbindet man die Punkte G und P durch eine Gerade GP $=$ C, so ist C die *Corde* des Bogens *pro radio* $= 1$, welcher den Winkel GAP misst; $C^2 = Gi^2 + iP^2 = 2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\mu$, also $C = \sqrt{2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\mu}$, $\frac{C}{2} = \mathrm{Sin}\,\frac{GAP}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\lambda\,\mathrm{Cos}\,\mu}$. Nun ist $GAP = \mathrm{Cos}\left(\frac{GAP}{2} + \frac{GAP}{2}\right) =$

$$\mathrm{Cos}^2\frac{GAP}{2} - \mathrm{Sin}^2\frac{GAP}{2} = \mathrm{Cos}^2\frac{GAP}{2} - 1 + \mathrm{Cos}^2\frac{GAP}{2} = 2\,\mathrm{Cos}^2\frac{GAP}{2} - 1,$$

also $\mathrm{Cos}\,GAP = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\lambda.\,\mathrm{Cos}\,\mu\right) - 1 = \mathrm{Cos}\,\lambda.\,\mathrm{Cos}\,\mu$. Ist $\mu = \eta$ und $\lambda = \theta$, so ist $\mathrm{Cos}\,GAP = \mathrm{Cos}\,\theta.\,\mathrm{Cos}\,\eta$; ist $\mu = \frac{\pi}{2} - \eta$ (π halber Kreisbogen *pro radio* $= 1$), und $\lambda = \theta$, so ist $\mathrm{Cos}\,GAP = \mathrm{Cos}\,\theta.\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) = \mathrm{Cos}\,\theta.\,\mathrm{Sin}\,\eta$.

Ad S. 121. letzte Zeile. Um das in diesen Paragraphen 104 und 105. Gesagte zu verstehen, und die darin stillschweigend angenommene Suppositionen zu errathen, diene folgendes: Da hier blos die rotatorische Bewegung des Planeten betrachtet wird, so nehme man dessen Schwerpunkt als stille stehend an. Die Axen AB, AC, AD seyen durch den Schwerpunkt auf einander senkrecht gezogen, und behalten im Raume ihre Lage, wenn auch die Lage der Drehaxe AF sich in zwey Rücksichten, nemlich in Rücksicht auf fixe Punkte des Planeten und in Rücksicht des Raumes ändert, und wenn

der ganze Planet durch Rotationen die Lage seiner Punkte um den Schwerpunkt im Raume ändert. Man kann also AB, AC, AD als drei durch den fixen Schwerpunkt A des Planeten gegen 3 Fixsterne B, C, D gezogene Gerade betrachten.

Die Kräfte, welche hier nach AB, AC, AD wirken, (ausser denen keine Kraft mehr am Planeten angebracht ist) müssen um die Axe AB, AC, AD Rotationen hervorbringen (nach meiner Erläuterung zum (§. 102.)). Hörte mit Ende der Zeit t die Wirkung der den Körper ergreifenden Kräfte auf, so würde vermöge des Trägheitsgesetzes von Ende der Zeit t an beständig fort um der Axen AF die Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ vor sich gehen, oder (welches dasselbe ist) es würde um AB, AC, AD, zugleich solche gleichförmige Rotation bestehen, dass diese dreifache Rotation die gleichförmige Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ϑ um AF zum Resultate hätte. Durch das Fortwirken dieser Kräfte aber kann sowohl die Winkelgeschwindigkeit um die binnen dt bestehende Drehaxe als die Lage der Drehaxe selbst geändert werden. Wir wollen die binnen dt Statt findende Drehaxe $=$ AF′ nennen, welche von jener AF der Lage nach nur unendlich wenig verschieden seyn kann; sind α', β', γ' die Winkel, welche AF′ mit der nach den Fixsternen gezogenen Axe AB, AC, AD bilden, so ist $\alpha' - \alpha = d\alpha$, $\beta' - \beta = d\beta$, $\gamma' - \gamma = d\gamma$. Wenn die Elementarkräfte um AB, AC, AD, dieselben Störungen der Rotationen bewirken sollen als die statischen Momente P, Q, R, so folgt, 1) dass die durch diese Elementarkräfte entstehende Summe der statischen Momente um AB $=$ P, jene um AD $=$ R seyn müsse *); 2) dass die bin-

*) Anmerkung. Wenn binnen dt um der Axe A (Taf. VII. Fig. 7.) die Massen m und m′, in den Entfernungen Am $=$ e und Am′ $=$ e′ angebracht, im festen Zusammenhange stehen, und es besteht eine Kraft K in h auf Ah $=$ E senkrecht wirkend, so ist die Beschleunigung eines Punktes I desselben Systems binnen dt, wenn AI $=$ i ist, $= g. \frac{K.\,h}{i} : \left(\frac{m.\,e^2 + m'.\,e'^2}{i^2}\right) = \frac{g.\,K.\,h.\,i}{m.\,e^2 + m'.\,e'^2}$; besteht hingegen die Kraft K gar nicht, sondern wirken binnen dt in m und m′ auf Am und Am′ senkrecht die Kräfte k und k′, so finden wir die binnen dt Statt findende Beschleunigung des Punktes I so: k′ in m′ übt in m einen Druck $= \frac{k'.\,e'}{e}$ aus, also besteht im Ganzen in m. $\perp$ Am der Druck $k + \frac{k'.\,e'}{e} = \frac{ke + ke'}{e}$; davon werde der Theil x auf die Bewegung von m, jener $\frac{ke + ke'}{e} - x = \frac{ke + k' - ex}{e}$ auf Bewegung von m′

nen dt um AB gewonnene Endesgeschwindigkeit (des Endpunktes des Radius = 1 um der Axe AB) gleich gross seyn müsse, ob um AB binnen dt das statische Moment P oder ob jene Summe von statischen Momenten Statt gefunden habe, welches aus allen q und allen r um AB entstanden ist, eben so um AC und um AD; sind aber in beiden (für die Rotationen um AB, AC, AD binnen dt) gleichgeltenden Fällen die Zunahmen an Endesgeschwindigkeiten der Endpunkte der Radien = 1 um die Axen AB, AC, AD, in ihren Kreisbahnen dieselben, so sind auch binnen dt die Inkremente an Endesgeschwindigkeit eines Punktes Z in seinen Kreisbahnen (von den Radien = $\sqrt{Y^2 + Z^2}$, $\sqrt{X^2 + Z^2}$; $\sqrt{X^2 + Y^2}$, um AB, AC, AD in beiden Fällen dieselben, also sind auch die Inkremente an Endesgeschwindigkeit des Elements Z nach AB, nach AC, nach AD in beiden Fällen dieselben. Diese Bemerkungen sind wahr, es möge der Körper binnen dt sich um dieselbe Axe AF als im letzten Zeitpunkte von t oder um eine andere Axe AF' bewegt haben, indem hier blos die Bewegungen um AB, AC, AD betrachtet werden, welche zusammengesetzte Funktionen von der zunehmenden Winkelgeschwindigkeit um der Drehaxe und von der Lage dieser Drehaxe binnen dt sind. du, dv, dw sind im §. 104. die Inkremente von Endesgeschwindigkeiten nach AB, AC, AD des Elements Z binnen dt, binnen welcher Zeit dt dieses Element Z nach AB, AC, AD die Räume udt, vdt, wdt durchläuft, daher X, Y, Z binnen dt um $dX = udt$, $dY = vdt$, $dZ = wdt$ zunehmen.

Die Summe aller statischen Momente binnen dt oder am Ende der Zeit t (bei Annahme der p'', q'', r'', dann) ist: um AB $= rY - qZ + r'Y' - q'Z' + r''Y'' - q''Z'' + \ldots\ldots$, um AC $= pZ - rX + p'Z' - r'X' + p''Z'' - r''X'' + \ldots\ldots$, um AD $= qX - pY + q'X' - p'Y' + q''X'' - p''Y'' + \ldots\ldots$ Nun ist $rY - qZ + r'Y' - q'Z' + \ldots\ldots = rY + r'Y' + r''Y'' + \ldots\ldots$

verwendet, so ist die bewegende Kraft von m und m' = x und $\frac{(ke + k'e' - xe)\,e}{e.\,e'}$, also die Beschleunigung von m und m' = $g.\frac{x}{m}$ und $g\,\frac{(ke + k'e' - xe)}{e'.\,m'}$, also

$g\,\frac{x}{m} : g\,\frac{(ke + k'e' - xe)}{e'.\,m'} = e : e'$, daraus ist die Beschleunigung von m $= g\,\frac{(k'e' + ke)\,e}{e'^2 m' + e^2 m}$, also die Beschleunigung von I $= \frac{gi\,(k'e' + ke)}{e'^2 m' + e^2 m}$, soll also in beiden Fällen die Beschleunigung von I gleich gross seyn, so muss seyn $\frac{gi.\,kh}{e'^2 m' + e^2 m} = \frac{gi\,(k'e' + ke)}{e'^2 m' + e^2 m}$ oder $Kh = k'e' + ke$.

$-(qZ + q'Z' + q''Z'' + \ldots) = n.\,dw.\,Y + n'.\,dw'.\,Y' + n''.\,dw''.\,Y'' + \ldots$
$-(n.\,dv.\,Z + n'.\,dv'.\,Z' + n''.\,dv''.\,Z'' + \ldots)$ sind dw, dw', dw'', ..., und dv, dv', dv'', ... die Inkremente an Endesgeschwindigkeit nach AD und AC binnen einerlei dt für die Elemente dM, dM', dM'', ... welche den Koordinaten X, Y, Z, dann X', Y', Z', dann X'', Y'', Z'', dann entsprechen, daher lässt sich diese Summe statischer Momente um AB so ausdrücken:

$$= \frac{1}{2g.\,dt}\,(dM.\,dw.\,Y + dM'.\,dw'.\,Y' + dM''.\,dw''.\,Y'' + dM'''.\,dw'''.\,Y''' + \ldots$$
$$- dM.\,dv.\,Z - dM'.\,dv'.\,Z' - dM''.\,dv''.\,Z'' - \ldots - \ldots) =$$
$$\frac{1}{2g.\,dt}\,(dM\,(dw.\,Y - dv.\,Z) + dM'\,(dw'.\,Y' - dv'.\,Z') +$$
$dM''\,(dw''.\,Y'' - dv''.\,Z'') + \ldots)$, welches auch so angedeutet werden kann $= \frac{1}{2g.\,dt}\int dM\,(Ydw - Zdv)$, worin das Zeichen $\int$ nicht eben Integrale, sondern blos Summe ausdrückt; es heisst nemlich $\int dM\,(Ydw - Zdv)$ die Summe aller im ganzen (binnen dt um AF' rotirenden) Körper bestehenden Werthe $dM\,(Ydw - Zdv)$ bei allen Elementen dM, dM', dM'', ... Drücken wir, Kürze halber, $dw = F(X, Y, Z, \alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt)$ und $dv =$ $f(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt)$ aus, so lässt sich $dM\,(Ydw - Zdv)$ durch $f(dM, X, Y, Z, \alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt)$ ausdrücken, und da $\alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt$ für alle dM, dM', dM'', ... (binnen einerlei dt) dieselben Werthe haben, so ist

$$\int dM\,(Ydw - Zdv) = f(dM, X, Y, Z, \alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt) +$$
$$f(dM', X', Z', Y', \alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt) +$$
$$f(dM'', X'', Y'', Z'', \alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt) +$$
$$f(dM''', X''', Y''', Z''', \alpha, d\alpha, \beta, d\beta, \gamma, \vartheta, d\vartheta, dt) + \ldots$$
Ganz derselbe Geist ist in die Ausdrücke $\int dM\,(Zdu - Xdw)$ und $\int dM\,(Xdv - Ydu)$ zu legen.

Es folgt aus $2g.\,dt.\,P = dM\,(Ydw - Zdv) + dM'\,(Y'dw' - Z'dv') +$
$$YdM.\,dw + Y'dM'.\,dw' + Y''dM''.\,dw'' + \ldots$$
$$- Z.\,dM.\,dv - Z'.\,dM'.\,dv' - Z''.\,dM''.\,dv'' - \ldots =$$
$$\int Y^2 dM.\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,d\vartheta - \int XYdM.\,\mathrm{Cos}\,\beta\,d\vartheta - \int Y^2 dM.\,\vartheta\,d\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha +$$
$$\int XYdM.\,\vartheta\,d\beta\,\mathrm{Sin}\,\beta + \int XYdM.\,\vartheta^2\,dt\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma +$$
$$\int Y^2 dM.\,\vartheta^2\,dt.\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \int YZdM.\,\vartheta^2\,dt.\,\mathrm{Sin}^2\gamma - \int XZdM.\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,d\vartheta +$$
$$\int Z^2 dM.\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,d\vartheta + \int XZdM.\,\vartheta\,d\gamma\,\mathrm{Sin}\,\gamma - \int Z^2 dM.\,\vartheta\,d\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha -$$

$\int XZ dM. \vartheta^2 dt. \cos\alpha \cos\beta - \int Z^2 dM. \vartheta^2 dt. \cos\beta \cos\gamma + \int YZ dM. \vartheta^2 dt. \sin^2\beta$
also blos für jenes Zeitelement, wo die drei Hauptaxen in den drei nach den Fixsternen gezogenen Axen liegen:

$$2g. dt. P = d\vartheta \cos\alpha (B + C) - \vartheta d\alpha \sin\alpha (B + C) + \vartheta^2 dt. \cos\beta \cos\gamma (B - C),$$

welches also keine Differenzialgleichung mehr ist, aus welcher allgemeine Folgerungen gezogen werden können. Sollen also (§. 104 und 105.) nichts Unsinniges enthalten, so muss Herr Schubert die Sache anders betrachtet haben, als ich sie hier darstellte. Wir wollen in diesen Untersuchungen weiter gehen.

Nimmt man AB, AC, AD als die drei Hauptaxen des Körpers an, und zerlegt am Ende der Zeit t die Endesgeschwindigkeit e des Elements nach diesen drei Hauptaxen in die Endesgeschwindigkeit u, v, w, versteht aber nur unter α, β, γ die Winkel zwischen Rotationsaxe AF und den drey Hauptaxen AB, AC, AD, nennt du, dv, dw, die Zuwächse an Endesgeschwindigkeit des Elements Z = dM binnen dt mit den Hauptaxen AB, AC, AD parallel: so sind X, Y, Z als beständig zu betrachten, wenn man aus u, v, w die Werthe von du, dv, dw erhalten will, also ist

$$du = d\vartheta (Z \cos\beta - Y \cos\gamma) - \vartheta (Z d\beta \sin\beta - Y d\gamma \sin\gamma),$$

$$dv = d\vartheta (X \cos\gamma - Z \cos\alpha) = \vartheta (X d\gamma \sin\gamma - Z d\alpha \sin\alpha)$$

$$dw = d\vartheta (Y \cos\alpha - X \cos\beta) - \vartheta (Y d\alpha \sin\alpha - X d\beta \sin\beta)$$

worin $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ die Zuwächse von α, β, γ binnen dt wegen der veränderten Lage der Drehaxe AF gegen die drei Hauptaxen andeuten; $d\vartheta$ ist wie vorhin der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit binnen dt um der Drehaxe für das Element Z. Sollen nun unter diesen Voraussetzungen die an jedem Elemente Z (zu Ende jeder Zeit t mit den Hauptaxen AB, AC, AD, parallel wirkenden) angebrachten Elementarkräfte p, g, r dieselben Rotationsstörungen zugleich um diese drei Hauptaxen binnen dt bewirken, als die um diese Hauptaxen AB, AC, AD binnen dt bestehenden statischen Momente, P, Q, R (welche dadurch entstehen, dass man alle den Körper binnen dt ergreifende Kräfte nach den drei Hauptaxen AB, AC, AD zersetzt, u. s. w.) hervorbringen, so muss (aus ähnlichen Gründen als zuvor) seyn:

$$\frac{2g\,p}{dM} dt = du, \; . \; . \; . \; . \text{ also } p = \frac{dM}{2g\,dt}. du, \; q = \frac{dM}{2g\,dt} dv, \; r = \frac{dM}{2g\,dt}, \text{ ferner}$$

$$P = rY - qZ + r'Y' - q'Z' + r''Y'' - q''Z'' + \ldots . = rY + r'Y' + \ldots \ldots$$

$$- qZ - q'Z' - \ldots \ldots = \frac{dM}{2g\,dt} dw. Y + \frac{dM'}{2g\,dt} dw'. Y' + \ldots \ldots \ldots$$

$$-\frac{dM}{2g\,dt}\,dv.\,Z - \frac{dM'}{2g\,dt}\,dv'.\,Z' - \ldots\ldots =$$

$$\frac{dM\,(Y\,dw - Z\,dv) + dM'\,(Y'\,dw' - Z'\,dw') + dM''\,(Y''\,dw'' - Z''\,dv'') + \ldots}{2g\,dt} =$$

$\frac{1}{2g\,dt} \int dM\,(Y\,dw - Z\,dv)$ [$\int$ heisst Summe]. Es folgt also unter den hier angenommenen Bedingnissen und Bezeichnungen der Buchstaben:

$2g\,dt.\,P = Y\,dM.\,dw + Y'\,dM'\,dw' + \ldots - Z\,dM.\,dv - Z'\,dM'.\,dv' - \ldots$
$= \int Y^2 dM.\,Cos\,\alpha.\,d\vartheta - \int XY\,dM.\,Cos\,\beta.\,d\vartheta - \int Y^2 dM.\,\vartheta\,d\alpha\,Sin\,\alpha +$
$\int XY\,dM.\,\vartheta\,d\beta\,Sin\,\beta - \int XZ\,dM.\,Cos\,\gamma.\,d\vartheta + \int Z^2 dM.\,Cos\,\alpha.\,d\vartheta +$
$\int XZ\,dM.\,\vartheta\,d\gamma\,Sin\,\gamma - \int Z^2 dM.\,\vartheta\,d\alpha\,Sin\,\alpha$, da sich aber hier X, Y, Z auf die drei Hauptaxen bezieht, so ist (§. 88.)

$$\begin{aligned} 2g\,dt.\,P &= d\vartheta\,Cos\,\alpha.\,B - \vartheta\,d\alpha\,Sin\,\alpha.\,B + \\ &+ d\vartheta\,Cos\,\alpha.\,C - \vartheta\,d\alpha\,Sin\,\alpha.\,C = \\ &= d\vartheta\,Cos\,\alpha\,(B + C) - \vartheta\,d\alpha\,Sin\,\alpha\,(B + C); \end{aligned}$$

eben so $2g\,dt\,Q = \ldots\ldots$ und $2g\,dt.\,R = \ldots\ldots$ Diese Formeln stimmen mit jenen des Herrn Schubert überein, nur dass das Glied $\vartheta\vartheta^2\,dt\,Cos\,\beta\,Cos\,\gamma$ bei P u. s. w. bei mir nicht vorkömmt, welches auch nicht vorkommen kann, da es nur dadurch in Rechnung kam, dass in $du = \ldots\ldots$ die Glieder $\vartheta dZ\,Cos\,\beta - \vartheta dY\,Cos\,\gamma$ vorkommen, welche ausbleiben müssen, wenn X, Y, Z sich auf die drei Hauptaxen des Körpers beziehen, es ist also bei den Formeln P, Q, R zu merken, dass das letzte Glied nur durch Substitution in die allgemeine Formel für jegliche Axe AB, AC, AD in Rechnung gekommen, dass aber selbiges = o betrachtet werden muss. Substituiren wir $\vartheta\,Cos\,\alpha = x$, $\vartheta\,Cos\,\beta = y$, $\vartheta\,Cos\,\gamma = z$, so erhalten wir

$2g\,P\,dt = (B + C)\,(d\vartheta\,Cos\,\alpha - \vartheta\,d\alpha\,Sin\,\alpha) = (B + C)\,dx = M.\,aa.\,dx$, also
I) $2g\,P\,dt = Maa.\,dx$, II) $2g\,Q\,dt = Mbb.\,dy$, III) $2g\,R\,dt = Mcc.\,dz$, folglich $2g\int P\,dt = Maa.\,x = Maa.\,\vartheta\,Cos\,\alpha$, $2g\int Q\,dt = Mbb.\,y = Mbb.\,\vartheta\,Cos\,\beta$, $2g\int R\,dt = Mcc.\,\vartheta\,Cos\,\gamma$; ist P beständig, so ist $2g\,P\,t + C = Maa.\,\vartheta\,Cos\,\alpha$, also wenn zu Anfange der Zeit t keine Rotation bestand, $2g\,P\,t = Maa.\,\vartheta\,Cos\,\alpha$, woraus sich der Lehrsatz ergibt: Wenn der frei schwebende Körper vor dem Ergriffenwerden von den äussern Kräften sich um keine Axe drehte, und er von den Kräften so ergriffen wird, dass diese Kräfte um der Hauptaxe AB beständig fort einerlei statisches Moment P ausüben, so wächst das Produkt aus dem Kosinus des Winkels α (den die jedesmalige Drehaxe mit der Hauptaxe AB bildet) in die Winkel-

geschwindigkeit um der Drehaxe (*pro radio* = 1) der Zeit proportional, und ist in jedem Augenblicke um so grösser, je grösser das beständige P, und je kleiner das beständige Trägheitsmoment Maa des Körpers um der Hauptaxe AB ist, welcher Satz wahr ist, es habe des Körpers Schwerpunkt was immer für eine fortschreitende Bewegung, und es mögen die statischen Momente Q und R um die 2 andern Hauptaxen AC, AD wie immer sich ändern.

Ad S. 123. Z. 10. Hier ist zu merken: Der Buchstabe u bedeutet ganz etwas anders in (§. 107.) als im (§. 104.). Die hier erwähnte beschleunigende Kraft jeder in Z konzentrirten Masse (also auch jener dM) durch die Attraktion der Elemente in der Masse des anziehenden Körpers V ist nur dann = $\frac{V}{Z\,V^2}$, wenn entweder die ganze Masse von V im Punkte V konzentrirt ist, oder wenn der Körper V eine in allen seinen Theilen gleich dichte Sphäre oder eine gleich dichte physische Kugeloberfläche ist, oder wenn er lauter (wenn auch unter sich nicht gleich dichte) konzentrische physische Kugeloberflächen (wo jede Kugeloberfläche für sich in allen ihren Theilen gleich dicht ist) bildet (§. 49.). Wir sprechen hier nur von einem perturbirenden Planeten V, der also (wie bisher immer) als gleich dicht, und von der Kugelgestalt nur sehr wenig abweichend angenommen wird. Eine geringe Abweichung des Körpers V von der Sphäre ändert aber an der beschleunigenden Kraft der in Z (Taf. IX. Fig. 1.) konzentrirten Massen so wenig, dass diese Aenderung aus der Rechnung bleiben kann, wenn von blosser Approximation die Rede ist. Denn sey im Falle der sphärischen Gestalt besagte beschleunigende Kraft = ZM, im Falle der nicht sphärischen Gestalt = ZM′, so kann ZM′ von ZM nur sehr wenig verschieden seyn, und der Winkel M′ZM ist auch sehr klein. Im ersten Falle waren der (in Z konzentrirten) Masse beschleunigende Kräfte nach Za und Zb = Zk und Zs, im zweiten Falle = Zk′ und Zs′, man darf aber Zk′ = Zk und Zs′ = Zs annehmen; denn sey $MZ\alpha = \alpha$, $MZb = \beta$, $MZM' = \mu$, $ZM' = ZM + \omega$, so ist $Zk = ZM. \frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,k}$, $Zs = ZM. \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,k}$, und

$Zk' = (ZM + \omega)\,\frac{\text{Sin}\,(s + \mu)}{\text{Sin}\,k}$, $Zs' = (ZM + \omega)\,\frac{\text{Sin}\,(\alpha - \mu)}{\text{Sin}\,k}$, worin man ω gegen ZM, und μ gegen β und α vernachlässigen darf. In Hinsicht des Einflusses auf die beschleunigende Kraft von Z durch V darf man also immerhin den gleich dichten Planeten V als vollkommen sphärisch betrachten.

Ad S. 123. Z. 13. In den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels hatten (Fig. 23.) AB, AC, AD, und der Punkt A dieselben Bedeutungen als hier (Fig. 30.) IA, IB, IC, und der Punkt I. In (Fig. 29.) machten mit der fixen sphärischen Oberfläche die Hauptaxen (Fig. 23.) AB, AC, AD, oder (Fig. 30.) IA, IB, IC, die Durchschnitte in A, B, C, zu Ende der Zeit t, und zugleich bildeten (Fig. 23.) AB, AC, AD, oder (Fig. 30.) IA, IB, IC, mit der wirklichen Drehaxe die Winkel α, β, γ, in A (Fig. 23.) oder in I (Fig. 30.). Mit denselben Hauptaxen AB, AC, AD (Fig. 23.) oder IA, IB, IC (Fig. 30.) im Schwerpunkte A (Fig. 23.) oder I (Fig. 30.) bildet am Ende derselben Zeit t die vom Schwerpunkte zum Mittelpunkte V des perturbirenden Planeten gezogene Gerade (Fig. 30.) IV die Winkel ζ, η, ϑ; es beziehen sich nemlich (Fig. 23. oder 30.) α und ζ auf AB oder AI, β und η auf AC oder IB, γ und ϑ auf AD oder IC. Es ist aber zu merken, dass η und ϑ hier ganz andere Bedeutungen haben, als (§. 103.). Durch ζ, η, ϑ ist die Lage des Mittelpunktes V des perturbirenden Planeten gegen die Hauptaxen des perturbirenden Planeten zu Ende t bestimmt, und durch v dessen Entfernung vom Schwer- oder Mittelpunkt I des perturbirenden Planeten am Ende der Zeit t. Wir haben schon am Ende einerlei Zeit t bei der Rotations-Perturbation eines Planeten durch einen andern Planeten folgende zusammengehörige veränderliche Grössen zu berücksichtigen: α, β, γ, dann ε, dann λ, l, φ, dann v, dann ζ, η, ϑ, dann V, oder statt v, ζ, η, ϑ, V, jene P, Q, R.

Ad S. 123. Z. 26. Es ist nemlich zu Ende t beim Elemente Z um IA das Moment

$$rY - qZ = \frac{V.dM}{ZV^3}(v \operatorname{Cos}\vartheta - Z)\,Y - \frac{V.\ dM}{ZV^3}(v \operatorname{Cos}\eta - Y)\,Z =$$

$\frac{V.\ v.\ dM}{ZV^3}\operatorname{Cos}\vartheta.\ Y - \frac{V.\ v.\ dM}{ZV^3}\operatorname{Cos}\eta.\ Z$, eben so beim Element Z′ um IA das Moment $= V.\ v.\ \operatorname{Cos}\vartheta.\ \frac{dM'}{ZV'^3}.\ Y' - V.\ v.\ \operatorname{Cos}\eta.\ \frac{dM'}{ZV'^3}.\ Z'$ u. s. w. Also ist zu Ende der Zeit t die Summe der statischen Momente um IA, welche durch die bewegenden Kräfte der Elemente Z, Z′, Z″, ... entsteht, =

$$\frac{V.\ v}{ZV^3}dM\,(Y \operatorname{Cos}\vartheta - Z \operatorname{Cos}\eta) + \frac{V.\ v}{ZV'^3}dM'\,(Y' \operatorname{Cos}\vartheta - Z' \operatorname{Cos}\eta) +$$

$$\frac{V.\ v}{ZV''^3}dM\,(Y'' \operatorname{Cos}\vartheta - Z'' \operatorname{Cos}\eta) + \ldots\ldots = V.\ v\left(\frac{dM}{ZV^3}(Y \operatorname{Cos}\vartheta - Z \operatorname{Cos}\eta)\right. +$$

$$\frac{dM'}{ZV'^3}(Y' \operatorname{Cos}\vartheta - Z' \operatorname{Cos}\eta) + \frac{dM''}{ZV''^3}(Y'' \operatorname{Cos}\vartheta - Z'' \operatorname{Cos}\eta) +$$

$V. v \int \frac{dM}{ZV^3} (Y \cos \vartheta - Z \cos \eta)$, worin $\int$ nicht Integral, sondern Summe heisst.

Ad S. 124. Z. 4. Denn es folgt aus $ZV^2 = v^2 - 2v (X \cos \zeta + Y \cos \eta + Z \cos \vartheta)$, (wogegen $X^2 + Y^2 + Z^2$ ausgelassen werden kann) $\frac{1}{ZV^3} = (ZV^2)^{-\frac{3}{2}} =$

$$(v^2 - 2v (X \cos \zeta + Y \cos \eta + Z \cos \vartheta))^{-\frac{3}{2}} = (= (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots) = (V^2)^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2} (v^2)^{-\frac{5}{2}} . 2v (X \cos \zeta + Y \cos \eta + Z \cos \vartheta)$$

$$- \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} (v^2)^{-\frac{3}{2}} . 2v (X \cos \zeta + Y \cos \eta + Z \cos \vartheta) \ldots \ldots = \frac{1}{v^3} + \frac{3}{v^4} (X \cos \zeta + Y \cos \eta + Z \cos \vartheta).$$

Ad S. 124. Z. 8. Es ist nemlich

$$P = V. v \left(\frac{dM}{ZV^3} (Y \cos \vartheta - Z \cos \eta) + \frac{dM'}{ZV'^3} (Y' \cos \vartheta - Z' \cos \eta) + \ldots \right) =$$

$$Vv \left(\cos \vartheta \left(\frac{Y\,dM}{ZV^3} + \frac{Y'\,dM'}{ZV'^3} + \frac{Y''\,dM''}{ZV''^3} \right) + \ldots \ldots - \cos \eta \left(\frac{Z\,dM}{ZV^3} + \frac{Z'\,dM'}{ZV'^3} + \frac{Z''\,dM''}{ZV''^3} + \ldots \ldots \right) \right).$$ Nun ist

$\frac{Y\,dM}{ZV^3} = \frac{Y\,dM}{v^3} + \frac{3 \cos \zeta}{v^4} XY\,dM + \frac{3 \cos \eta}{v^4} Y^2\,dM + \frac{3 \cos \vartheta}{v^4} YZ\,dM$, und

$\frac{Z\,dM}{ZV^3} = \frac{Z\,dM}{v^3} + \frac{3 \cos \zeta}{v^4} XZ\,dM + \frac{3 \cos \eta}{v^4} YZ\,dM + \frac{3 \cos \vartheta}{v^4} Z^2\,dM$, daher ist

$$P = V. v \left(\cos \vartheta \left(\frac{1}{v^3} \int Y\,dM + \frac{3 \cos \zeta}{v^4} \int XY\,dM + \frac{3 \cos \eta}{v^4} \int Y^2\,dM + \frac{3 \cos \vartheta}{v^4} \int Y'' Z\,dM \right) - \cos \eta \left(\frac{1}{v^3} \int Z\,dM + \frac{3 \cos \zeta}{v^4} \int XZ\,dM + \frac{3 \cos \eta}{v^4} \int YZ\,dM + \frac{3 \cos \vartheta}{v^4} \int Z^2\,dM \right) \right),$$ oder $P = V. v \left(\frac{3 \cos \vartheta . \cos \eta}{v^4} . B - \frac{3 \cos \vartheta . \cos \eta}{v^4} . C \right)$

$= \frac{3 V. \cos \vartheta . \cos \eta}{v^3} (B - C).$

Ad S. 124. Z. 22. Das ist so zu verstehen: Wenn zur Perturbationsberechnung in der Rotation eines Planeten (welche Perturbation durch die Attraktion eines andern Planeten dadurch entsteht, dass die Attraktion auf den Perturbations-Planeten sich nicht in dessen Schwerpunkte konzentrirt) zu Ende jeder Zeit t bekannt sind: V, v, ζ, η, ϑ, d. h. wenn v, ζ, η, ϑ bekannte Funktionen von t sind, und V gegeben ist, z. B., $v = \mathfrak{v}(t)$, $\zeta = \mathfrak{Z}(t)$, $\eta = \mathfrak{E}(t)$, $\vartheta = \mathfrak{T}(t)$, so hat man folgende Gleichungen:

I) $o = dx - \left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right) dt. \frac{6.\ g.\ V}{\mathfrak{v}(t)^3} \operatorname{Cos} \mathfrak{E}(t). \operatorname{Cos} \mathfrak{T}(t).$ oder kurz ausgedrückt

I) $o = dx - 6g \left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right) V.\ F(t)\ dt,$ eben so

II) $o = dy - 6g \left(\frac{a^2 - c^2}{b^2}\right) V.\ \overset{+}{F}(t)\ dt,$ eben so

III) $o = dz - 6g \left(\frac{b^2 - a^2}{c^2}\right) V.\ \overset{++}{F}(t)\ dt,$ woraus folgen mag durch Integration:

I) $x + f(t) = G$, II) $y + \overset{+}{f}(t) = K$, III) $z + \overset{++}{f}(t) = H$, aus welchen 3 Gleichungen für jedes angenommene t gefunden werden kann x, y, z, oder $\varrho \operatorname{Cos} \alpha$, $\varrho \operatorname{Cos} \beta$, $\varrho \operatorname{Cos} \gamma$. Sey z. B. $\varrho \operatorname{Cos} \alpha = \mathfrak{a}$, $\varrho \operatorname{Cos} \beta = \mathfrak{b}$, $\varrho \operatorname{Cos} \gamma = \mathfrak{g}$, so folgt ferner aus $\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1$, dass (da $\varrho^2 (\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma) = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{g}^2$ ist) $\varrho = \sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{g}^2}$ sey, also ist dann bekannt

$$\varrho = \sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{g}^2},\ \operatorname{Cos} \alpha = \frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{g}^2}},\ \operatorname{Cos} \beta = \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{g}^2}},$$

$\operatorname{Cos} \gamma = \frac{\mathfrak{g}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{g}^2}}$, d. h. es ist zu Ende jeder angenommenen Zeit die Winkelgeschwindigkeit um der Drehaxe und die Lage der Drehaxe gegen die Hauptaxen bekannt, wenn v, $\mathfrak{v}$, ζ, η, ϑ bekannte Funktionen von t sind, und V gegeben ist.

Es folgt aus den Differenzialgleichungen I, II, III, für $a = b = c$, $dx = o$, $dy = o$, $dz = o$, also x, y, z, oder $\varrho \operatorname{Cos} \alpha$, $\varrho \operatorname{Cos} \beta$, $\varrho \operatorname{Cos} \gamma$, beständige Grössen, also da $\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1$ ist, folgen dann für ϱ, α, β, γ, beständige Werthe, Ist also der durch V perturbirte Planet eine Kugel, so ist seine Perturbation durch V soviel wie keine; es bleibt nemlich die Winkelgeschwindigkeit ϱ um der Drehaxe beständig dieselbe, und es verändert sich auch die Lage der Drehaxe gegen die Hauptaxe gar nicht; das hindert aber nicht, dass auch dann die Hauptaxe gegen Fixsterne beständig fort ihre Lage ändere, d. h. λ, l, φ, veränderlich sind.

Ad S. 125. Z. 2. Man sieht hier leicht folgendes ein: Möchte ein anderer Planet auf den Planeten I wie V wirken, ist dessen Gewicht $= V'$, ist am Ende der Zeit t die Entfernung seines Mittelpunktes von jenem I des perturbirenden Planeten $= v'$, und seine Lage gegen die Hauptaxen IA, IB, IC, durch ζ', η', ϑ' bestimmt, und nennen wir die statischen Momente am Ende der Zeit t um IA, IB, IC (blos durch den Planeten V′ bewirkt) $= P'$, Q', R', so ist:

$$P' = \frac{3\,M.\,V'\,(c^2 - b^2)}{v'^3} \operatorname{Cos} \eta'.\operatorname{Cos} \vartheta',$$

$$Q' = \frac{3\,M.\,V'\,(a^2 - c^2)}{v'^3} \operatorname{Cos} \zeta'.\ \operatorname{Cos} \vartheta',$$

$$R' = \frac{3\,M.\,V'\,(b^2 - a^2)}{v'^3} \operatorname{Cos} \eta'.\ \operatorname{Cos} \zeta'.$$

Wirken also die Planeten V und V′ zugleich auf den perturbirten Planeten I, so sind die statischen Momente am Ende der Zeit t um IA, IB, IC, $= P + P'$, $Q + Q'$, $R + R'$, oder $=$

$$3\,M\ (c^2 - b^2)\left(\frac{V.\operatorname{Cos}\eta.\operatorname{Cos}\vartheta}{v^3} + \frac{V'.\operatorname{Cos}\eta'\operatorname{Cos}\vartheta'}{v'^3}\right),$$

$$3\,M\ (a^2 - c^2)\left(\frac{V.\operatorname{Cos}\zeta\operatorname{Cos}\vartheta}{v^3} + \frac{V'\operatorname{Cos}\zeta'\operatorname{Cos}\vartheta'}{v'^3}\right),$$

$$3\,M\ (b^2 - a^2)\left(\frac{V\operatorname{Cos}\eta\operatorname{Cos}\zeta}{v^3} + \frac{V'\operatorname{Cos}\eta'\operatorname{Cos}\zeta'}{v'^3}\right),$$

Diese Werthe in die Gleichungen I, II, III, (§. 105.) statt P, Q, R, substituirt, geben die binnen jedem dt Statt findenden Differenzialgleichungen für den Fall der zugleichen Wirkung von V und V′ auf den perturbirten Planeten. Man erhält also dann:

$$\text{I. } dx - 6g\,dt\left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)\left(\frac{V}{v^3}\operatorname{Cos}\eta\operatorname{Cos}\vartheta + \frac{V'}{v'^3}\operatorname{Cos}\eta'\operatorname{Cos}\vartheta'\right) = 0,$$

$$\text{II. } dy - 6g\,dt\left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right)\left(\frac{V}{v^3}\operatorname{Cos}\zeta\operatorname{Cos}\vartheta + \frac{V'}{v'^3}\operatorname{Cos}\zeta'\operatorname{Cos}\vartheta'\right) = 0,$$

$$\text{III. } dz - 6g\,dt\left(\frac{b^2 - a^2}{c^2}\right)\left(\frac{V}{v^3}\operatorname{Cos}\eta\operatorname{Cos}\zeta + \frac{V'}{v'^3}\operatorname{Cos}\eta'\operatorname{Cos}\zeta'\right) = 0;$$

eben so sieht man, dass wenn zugleich die Planeten V, V′, V″, den Planeten I in seiner Rotation perturbiren, binnen dt die Gleichungen Statt finden

$$I, dx - 6g\left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)\left(\frac{V}{v^3} \text{Cos}\, \eta\, \text{Cos}\, \vartheta + \frac{V'}{v'^3} \cdot \text{Cos}\, \eta'\, \text{Cos}\, \vartheta' + \frac{V''}{v''^3} \text{Cos}\, \eta''\, \text{Cos}\, \vartheta''\right) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen IV, V, VI, bleiben allgemein ausgedrückt dieselben, ob blos V oder ob V, V′, V″, ... den Planeten I in seiner Rotation stören, allein die Resultate aus diesen Gleichungen sind in den zweierlei Fällen deshalb verschieden, weil darinn x, y, z, aus den Gleichungen I, II, III, verschiedene Werthe haben.

Der Geist der allgemeinen Bestimmungsmethode der Rotationsstörungen eines freischwebenden Planeten reduzirt sich kurz auf folgendes: Sind die statischen Momente P, Q, R um den Hauptaxen AB′, AC′, AD′, (Fig. 23.) oder IA, IB, IC, (Fig. 30.) bekannte Funktionen der Zeit t; werden diese Funktionen in die Gleichungen (§. 105.) I, II, III, substituirt, und lassen sich diese Gleichungen dann integriren, so hat man (die Gleichung $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$ mitgerechnet) 4 Gleichungen, worinn, wenn für t ein beliebiger Werth angenommen wird, ausser $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, alles gegeben ist, daher hieraus $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, d. h. die Lage der Drehaxe im Körper aber nicht im Raume und die Winkelgeschwindigkeit um der Drehaxe am Ende der festgesetzten Zeit t gefunden werden kann. Im (§. 106.) bestimmen die Gleichungen IV, V, VI, zu Ende einer angenommenen Zeit t, die Werthe von λ, l, φ, d. h. die Lage der Hauptaxen, daher auch jene der Drehaxe im Raum, doch wird dabei schon vorausgesetzt, dass zu Ende jeder beliebigen Zeit t die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ bekannt seyen. Es bestimmen demnach die Gleichungen I, II, III, IV, V, VI, nebst jener $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$ die Lage der Drehaxe sowohl gegen die Hauptaxen als im Raume gegen Fixsterne, nebst der Winkelgeschwindigkeit um der Drehaxe am Ende jeder beliebigen Zeit t, wenn nur bekannt ist, was für Funktionen von t die statischen Momente P, Q, R, um die Hauptaxen sind. Da nun bei jedem Planeten die Perturbation der Rotation durch nichts anders entsteht, als dass andere Planeten auf ihn excentrisch wirken, so hängen P, Q, R blos allein von diesen excentrischen Attraktionen ab, daher P, Q, R durch jene Grössen V, v, ζ, η, ϑ, V′, v′ ζ', η', ϑ', ... im (§. 107.) ausgedrückt werden, welche diese excentrischen Attraktionen am Ende jeder Zeit t bestimmen. Sollen demnach die Gleichungen I, bis VI, für das Ende jeder Zeit t die Lage der Drehaxe im perturbirten Planeten sowohl als im Raume und die Winkelgeschwindigkeit um der Drehaxe bestimmen, so müssen

V, V′, V″, ... gegeben und bekannt seyn, was für Funktionen von t die Grössen v, ζ, η, ϑ, v′, ζ', η', ϑ' seyen.

Ad S. 125. Z. 3. Wenn man nemlich die Gewichte aller Planeten in unserm Sonnensysteme sammt jenem der Sonne (in Erdgewichte ausgedrückt) durch V, V′, V″, . . . ihre selenocentrischen Lagen in allen Epochen durch v, ζ, η, ϑ, v′, ζ', η', ϑ', v″, ζ'', η'', ϑ'', ... andeutet, so ist für die Mondesrotationsperturbation (im Sinne der vorhergehenden Paragraphe):

$$\text{I, } dx - 6g\left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)\left(\frac{V}{v^3}\text{ Cos }\eta\text{ Cos }\vartheta + \frac{V'}{v'^3}\text{ Cos }\eta'\text{ Cos }\vartheta' + \frac{V''}{v''^3}\text{ Cos }\eta''\text{ Cos }\vartheta'' + \ldots\right)$$

u. s. w.; substituirt man nun für was immer für eine Epoche statt V, V′, V″, ... η, ϑ, η', ϑ', η'', ϑ'', ... v, v′, v″ die zusammengehörigen Werthe, welche man aus astronomischen Beobachtungen am Himmel und aus hieraus gemachten Folgerungen kennt; so findet sich, dass $\frac{V'}{v'^3}$ Cos η' Cos ϑ' + $\frac{V''}{v''^3}$ Cos η'' Cos ϑ'' + ... gegen $\frac{V}{v^3}$ Cos η . Cos ϑ, vernachlässigt werden dürfen, wenn V, v, η, ϑ, ζ sich auf den Planeten Erde beziehen. Die Gleichungen I, II, III, (und daher auch IV, V, VI,) zur Bestimmung der Störungen der Mondesrotation dürfen also approximative eben so angesetzt werden, als ob allein die Erde auf diese Störungen Einfluss hätte, wenn dieses gleich (strenge genommen) wegen der allgemeinen Gravitation und der sphärischen Gestalt der übrigen Planeten nicht wahr seyn kann.

Ad S. 126. Z. 20. Hier sind (Fig. 31.) die grössten Kreise AB, und EBD jene zwei gegen Fixsterne unbewegliche Kreise, welche (Fig. 29.) durch IEL und INL dargestellt sind, welche nemlich die Lage von A, B, C, und V am Ende jeder Zeit t bestimmen helfen. AC, BC, AC haben in (Fig. 31.) und (Fig. 29.) einerlei Bedeutung, also die Werthe = 90°. Es waren in (Fig. 29.) α = AO, β = BO, γ = CO (in Fig. 30.) ζ = AIV, η = BIV, ϑ = CIV, in (Fig. 29.) λ = AEI, l = AE, μ = BEI, m = BE, ν = CEI, n = CE, φ = EAB, in (Fig. 30.) v = IV; also ist in (Fig. 31.) α = o, β = 90°, γ = 90°, ζ = 90°, η = BV, ϑ = CV, λ = o, l = o, μ = o, m = 90°, ν = 90°, n = 90°, φ = unendlich viele Werthe. Dass $\eta + \vartheta$ = 90° sey, folgt hieraus: η wird von B, bis V nach BV positiv bestimmt, und ϑ wird von C bis V nach CV positiv bestimmt; fällt also V

auch ausserhalb BC, z. B. in E, so ist $\eta = -$ BE, $\vartheta =$ CB + BE, also $\eta + \vartheta =$ CB $= 90°$.

In (§. 105.) sind $x = \varrho \cos \alpha$, $y = \varrho \cos \beta$, $z = \varrho \cos \gamma$, also sind (Fig. 31.) $x = \varrho$, $y = 0$, $z = 0$. Im §. 107, war:

$$\text{I, } dx = \left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right) dt. \frac{2 . 3 . g. V}{v^3} \cos \eta \cos \vartheta, \text{ also ist hier:}$$

$$\text{I, } d\varrho = \left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right) \frac{3g V}{v^3} dt . 2 \cos \eta \cos \vartheta =$$

$$\left(\frac{c^2 - b^2}{a^2 v^3}\right). 3. g. V. dt. 2 \cos \eta \sin \eta = \left(\frac{c^2 - b^2}{a^2 v^3}\right). 3g V. dt \sin 2\eta.$$

Man bemerke hier noch folgendes: Wenn man die zwei (für die Mondsrotation) gleichgeltenden Fälle betrachtet, ob das Mondscentrum um das stille stehende Erdcentrum mit einer gewissen Winkelbewegung (*pro radio* = 1) läuft, oder ob das Erdcentrum mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit (*pro radio* = 1) um das stille stehende Mondcentrum läuft; (wo also am Ende jeder Zeit t in beiden Fällen einerlei Werthe für ν, ζ, η, ϑ, so wie auch einerlei Lage der Hauptaxen des Mondes gegen Fixsterne vorausgesetzt ist) so ist in beiden Fällen einerlei Winkelgeschwindigkeit (*pro radio* = 1) erforderlich. Das folgt (Taf. IX. Fig. 2.) drücke den ersten, Fig. 3. den zweiten Fall aus: xy in beiden Fällen einerlei gegen Fixsterne unbewegliche Gerade. Die Hauptaxe IB sey am Anfange der Zeit t in beiden Fällen gegen xy um ψ, am Ende der Zeit t um σ geneigt. Im 1ten Falle habe binnen der Zeit t das Mondscentrum den Winkel II′, im 2ten Falle das Erdcentrum den Winkel VIV′ beschrieben; nun behaupte ich, dass IVI′ = VIV′; denn, ziehe I′G ‡ xy, so ist GI′B = α = VIB′, ferner VI′B′ = V′IB′ = η, also GI′B′ — VI′B′ = VIB′ — V′IB′ oder GI′V = VIV′, oder I′VI = VIV′. Beide Vorstellungen, sowohl das Stillstehen des Erdcentrums und das Herumlaufen des Mondcentrums um das fixe Erdcentrum, als das Stillestehen des Mondcentrums und das Herumlaufen des Erdcentrums um das fixe Mondcentrum, sind, mit den wirklichen Bewegungen von Erde und Mond verglichen, falsch, können aber als gleichgeltend mit dem Falle der fortschreitenden Bewegung der Mondsbahn (wie diess wirklich vor sich geht) angenommen werden, doch, wohlgemerkt, nur in so ferne blos die Rotationsstörung des Mondes betrachtet wird, denn diese wird durch die 6 Gleichungen I, bis VI, (§. 107.) bestimmt, deren Resultate blos davon abhängen, was für Funktionen von t (bei gegebenem V) die Grössen ν, ζ, η, ϑ, sind, stehe die Mondsbahn stille oder laufe sie um die Sonne fort. Daraus,

dass in den hier (für die Störung der Mondsrotation) als gleichgeltend betrachteten 2 Fällen am Ende jeder Zeit t seyn muss VIV′ = IVI′, und IV′ = VI′ = v, folgt, dass wenn im ersten Falle die Mondsbahn um das fixe Erdcentrum durch (Taf. 8. Fig. 9.) ausgedrückt ist, worinn ab, cd, ef, ... die binnen dem 1ten, 2ten, 3ten sehr kleinen Zeittheilchen (lauter gleiche Zeittheilchen) vom Mondcentro durchlaufenen Räume darstellen, die durch (Taf. 9. Fig. 4.) dargestellte Erdcentrumbahn um das fixe Mondscentrum ganz dieselbe Bahn als (Taf. 8. Fig. 9.) seyn müsse, und dass 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, 𝔢, 𝔣, . . . dieselben Punkte in (Taf. 9. Fig 4.) seyen, als a, b, c, d, e, f, ... in (Taf. 8. Fig. 9.), wenn 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, 𝔢, 𝔣, ... die binnen der 1ten, 2ten, 3ten sehr kleinen Zeittheilchen (diese Zeittheilchen dieselben als zuvor) durchlaufenen Räume darstellen, und dass I zu allen Punkten der Kurven (Taf. IX. Fig. 4.) so liege, wie V zu den homologen Punkten der Kurven (Taf. VIII. Fig. 9.), wenn I das fixe Mondscentrum und V das fixe Erdcentrum sind. Spricht man also von diesen (für die Mondrotationsstörung) gleichgeltenden 2 Fällen, so sind die Ausdrücke gleichbedeutend: mittlere Bewegung der Erde oder mittlere Bewegung des Mondes, dann wahre Bewegung der Erde oder wahre Bewegung des Mondes, dann Erdnähe oder Mondesnähe, dann Erdferne oder Mondesferne, dann wahre Anomalie in der Mondbahn oder wahre Anomalie in der Erdbahn, dann mittlere Anomalie in der Mondbahn, oder mittlere Anomalie in der Erdbahn; dann stündliche Bewegung des Mondes oder stündliche Bewegung der Erde, dann die mittlere Entfernung des Mondes oder die mittlere Entfernung der Erde, dann die wahre Entfernung des Mondes oder die wahre Entfernung der Erde, dann der wahre Ort des Mondes oder der wahre Ort der Erde u. s. w., wobei alle diese Ausdrücke sich auf das Ende einerlei Zeit t beziehen.

Der Sinn des eben Gesagten ist eigentlich (nicht blos auf die Rotationsstörung des Mondes, sondern jedes andern Planeten I durch die perturbirenden Planeten V, V′, V″, ... angewandt) folgender: Die 7 Gleichungen I VI. (§. 107.) und jene $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1$ bleiben wahr, so lange man (bei jenem in seiner Rotation durch andere Himmelskörper V, V′, V″ perturbirten Himmelskörper I, welcher die Werthe a, b, c, M entsprechen,) die zusammengehörigen Werthe α, β, γ, ε, λ, l, φ, V, v, ζ, η, ϑ, V′, v′ ζ', η', ϑ', ... hineinsubstituirt. Da also diese 7 Gleichungen das Rotationsgesetz des perturbirten Himmelskörpers vollkommen bestimmen, so sind alle jene Fälle in Hinsicht des Rotationsgesetzes des Himmelskörpers I unter einander gleichgeltend, wo α, β, γ, ε, λ, l, φ, V, v, ζ, η, ϑ, V′, v′, ζ', η', ϑ', ... am Ende einerlei Zeit t

dieselben Werthe haben, d. h. wo sie dieselben Funktionen von t sind, möge dann I stille stehen, und das Herumlaufen von V, V′, V″, ... um I, oder mögen V, V′, V″, I alle sowohl fortlaufen als zugleich um einander herumlaufen u. s. w. Den Geist des hier Gesagten zu erwägen ist sehr wichtig, damit an der Richtigkeit der nun vorkommenden Lehre beim Monde und der Erde nicht etwa aus dem Grunde gezweifelt werden könne, weil Erde und Mond um die Sonne laufen, weil eigentlich alle Planeten, Monde, Kometen, und die Sonne einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben, um den sich alle diese Körper drehen, (§. 60.) u. s. w. Man bedenke, dass v, ζ, η, ϑ, V′, v′ ζ', η', ϑ' am Ende jeder Zeit t von der relativen Lage von I gegen V, V′, V″, ... und der Hauptaxen von I gegen die Verbindungslinien v, v′, v″, . . abhängen, wie man sich immer die wirklichen Bewegungen von I, V, V′, V″, . . . vorstellen mag.

Im folgenden Absatze dieses (§. 109.) behalten v, ζ, η, ϑ, ε, t, a, b, c, ihre bisherigen Bedeutungen, nicht aber α, β, γ, λ, M, e. Es beziehen sich δ, λ, ε auf den Endpunkt des Radius = 1, um der Drehaxe (Fig. 51.) IA. [das I lässt sich leicht plaziren, wenn es auch die Figur nicht enthält.].

Ad S. 127. Z. 2. Hier ist t von jenem Zeitpunkte an gezählt, wo der Mond in der Erdferne ist. Um das im letzten Absatze des (§. 109.) Gesagte zu verstehen, mag noch folgende Erläuterung dienen: ED ist jener Theil der Absidenlinie (in der sich hier vorgestellten Bahn des Erdcentrums um das Mondcentrum), welcher durch die um das Mondcentrum I *cum radio* = 1 beschriebene sphärische Oberfläche EADCVB abgeschnitten wird, so dass wir also die Anomalien, mittleren und wahren Standorte (am Ende der Zeit t) der Erde in ihrer eingebildeten Bahn durch jene Bogenstücke des Kreises EBVCDE bestimmen, welche von E an gemessen werden. Diesem gemäss sind die Punkte E und D fix im Raume, nemlich gegen Fixsterne beständig in einerlei Lage, hingegen laufen B, C, V im Kreise EBVCD, (welcher Kreis gegen Fixsterne so wie der Punkt A beständig dieselbe Lage beibehält), doch so, dass BC immer = 90° wie BA und CA bleibt. BV und CV ändern ihre Werthe, aber deren Summe BV + VC bleibt beständig = 90°. Am Ende der Zeit t bezieht sich ε auf die Punkte B und C. Der Ausdruck: Wenn der Mond sich gleichförmig bewegte, heisst so viel als: wenn das Mondscentrum in seiner Bahn um das Erdcentrum binnen jeder Zeiteinheit einerlei Winkel δ *pro radio* = 1 beschriebe (oder wenn dieses vom Erdcentro um das Mondescentrum wahr wäre). Der wahre Ort des Erdcentrums, nemlich EV, ist die wahre Anomalie des Erdcen-

trums in seiner Bahn um das Mondscentrum, $\delta . t$ oder $A . t$ ist dessen mittlere Anomalie, daher ist $EV = v$, $\delta . t = A . t = \mu$, $M = - \varphi$, in der Gleichung $\mu - v = \varphi = \ldots\ldots$ (theorische Astr. Seite 153.); ob φ eine positive oder eine negative Grösse sey, hängt davon ab, ob man von einer Zeit spricht, am Ende welcher der in seiner Bahn laufende Körper (z. B. um die Sonne) in der Gegend des *Apheliums* oder *Periheliums* ist. Man kann also sagen $\mu - v = \pm \varphi$, und in unserm Falle $\delta . t - EV = \pm M$ oder $EV = \delta . t \pm M$, und dann ist $M = \varphi$, und wir können allgemein sagen: $EV = \delta . t + M$, da der algebraische Ausdruck $\varphi = \gamma . \text{Sin}\, \mu\, (2 - \frac{1}{\eta} \gamma^2) \ldots\ldots\ldots\ldots$ schon den jedesmaligen Werth $= +$ oder $= -$ von M entscheidet. Es folgt aus:

$$\varphi = \gamma . \text{Sin}\, \mu\, (2 - \frac{1}{\eta} \gamma^2) - \frac{1}{\eta} \gamma^2 . \text{Sin}\, 2\mu\, (5 - \frac{11}{6} \gamma^2) + \frac{15}{12} \gamma^3\, \text{Sin}\, 3\mu - \frac{105}{96} \gamma^4 . \text{Sin}\, 4\mu,$$

für unsern Fall:

$$M = \alpha' . \text{Sin}\, A . t\, (2 - \frac{1}{\eta} \alpha^2) - \frac{1}{\eta} \alpha'^2\, \text{Sin}^2\, At\, (5 - \frac{11}{6} \alpha^2) + \frac{15}{12} \alpha'^3 . \text{Sin}\, 3\, A . t - \frac{105}{96} \alpha'^4\, \text{Sin}\, 4\, A . t,$$

worinn α' jener Quotient ist, den man erhält, wenn man die Excentrizität c der Mondsbahn (oder der eingebildeten Erdbahn) durch die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde (c und a in einerlei beliebigen Längeneinheit ausgedrückt) dividirt, daher α' ein sehr kleiner Bruchtheil ist, in dem die Mondbahn vom Kreise sehr wenig abweicht, in dessen Centro fast das Erdcentrum liegt. Es ist also approximative: $M = 2\, \alpha' . \text{Sin}\, A . t$, oder wenn wir $2\, \alpha' = \alpha$ nennen, $M = \alpha\, \text{Sin}\, At$, worinn also α die doppelte Excentrizität der Mondbahn getheilt durch die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde. Heissen in der elliptischen Mondesbahn, in deren einem Brennpunkte das Erdcentrum ist (wie aus Beobachtungen bekannt ist) a, b, die grosse und kleine Axe, so ist die jedesmalige Entfernung des Mondscentrums vom Erdcentro $= cd$ (Taf. X. Fig. 1.) $= v = a - \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$ also ist das grösste $v = a + \sqrt{a^2 - b^2} = cm$, und das kleinste $= a - \frac{a}{a} \sqrt{a^2 - b^2} = a - \sqrt{a^2 - b^2} = cn$,

da x nicht kleiner als $-a$, und nicht grösser als $+a$ werden kann; der mittlere Werth von

v ist also $\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2} + a - \sqrt{a^2 - b^2}}{e} = a$, welches die Bedeutung von e im (§. 109.) hat.

Es ist (Theorische Astr. S. 133.) $z = a\,(1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \gamma\,(1 - \frac{3}{8}\gamma^2)\ \mathrm{Cos}\ \mu - \gamma^2\,(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\gamma^2)\ \mathrm{Cos}\ 2\,\mu + \frac{3}{8}\gamma^3\ \mathrm{Cos}\ 3\,\mu - \frac{1}{3}\gamma^4.\ \mathrm{Cos}\ 4\,\mu$, ist γ sehr klein, so ist $z = a + a\,\gamma\ \mathrm{Cos}\ \mu$ = (Theorische Astr. §. 121.) $= a + \frac{c}{a}.\ a.\ \mathrm{Cos}\ \mu = a + c\ \mathrm{Cos}\ \mu$, worinn a und c die grosse Halbaxe und die Excentrizität (in einerlei beliebigen Längeneinheit ausgedrückt) der jedesmaligen Bahn, worauf sich z und μ in derselben Längeneinheit bezieht, ausdrücken. Bei der Mondbahn heisse $\mu = A.t$, $c = \gamma$, $a = e$, $z = v$, und zwar sind bei v, e, γ, μ als Einheit der Länge der Erdhalbmesser angenommen, also ist $v = e + \gamma\ \mathrm{Cos}\ At$; hier ist γ die Excentrizität der Mondsbahn in Erdhalbmessern ausgedrückt, dass also γ von der Mondsbahn - Excentrizität abhänge, hat nur in so ferne einen vernünftigen Sinn, als die Zahl γ, welche die Mondsbahn-Excentrizität in Erdhalbmessern ausdrückt, von jener Zahl abhängt, welche dieselbe Excentrizität in einem andern Längenmaasse ausdrücken möchte. Diess ist hier darum gesagt, weil gewöhnlich die Excentrizität jeder Bahn in Theilen der grossen Halbaxe dieser Bahu ausgedrückt in den Tafeln der Elemente der Bahn vorkömmt.

Es folgt $\frac{1}{v^3} = v^{-3} = (e + \gamma\ \mathrm{Cos}\ At)^{-3} = e^{-3} - 3e^{-4}\,\gamma\ \mathrm{Cos}\ At + 6\,e^{-5}\,\gamma^2\ \mathrm{Cos}^2\ At. \ldots = \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^3}.\ 3\ \mathrm{Cos}\ At.\ \frac{\gamma}{e} + \frac{1}{e^3}.\ 6.\ \mathrm{Cos}^2\ At.\ \frac{\gamma^2}{e^2} \ldots = \frac{1}{e^3} - \frac{3\gamma\ \mathrm{Cos}\ At}{e^4}$ (da $\frac{\gamma}{e}$ ein sehr kleiner Bruch ist). Dass hier V = 1 sey, folgt daraus, dass (§. 107.) V durch die Erdmasse ausgedrückt wurde, d. h. V war (§. 107.) die Zahl, welche andeutete, wie oft das Gewicht der Erde im Gewichte des perturbirenden Planeten enthalten sey, (alle Gewichte an der Oberfläche der Erde gewogen). In (§. 108, §. 109.) ist der perturbirende Körper die Erde, also V = 1.

Nimmt man den für die Perturbation der Mondrotation (d. h. für das Gesetz, nach welchen die Mondsrotationen nach einander vor sich gehen) mit der Wirklichkeit gleichgeltenden Fall des Stillstandes des Mondscentrums I (Fig. 31.) und des Herumlaufens des Erdcentrums um I in jener Ebene worinn die 2 andern Hauptaxen IB,

IC des Mondes liegen, (als jene IA, um welche die Rotation des Mondes beständig vor sich geht) in einer ganz gleichen Bahn als die Mondesbahn (um die Erde) mit einer ganz gleichen Winkelbewegung *pro radio* = 1 (als der Mond um die Erde läuft) und am Ende einerlei Zeit t demselben *radius vector* = v entsprechend (als das Mondcentrum gegen das Erdcentrum in der Wirklichkeit behauptet) an, so ist:

$$\frac{dd\eta}{dt^2} + A\,A\,.\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,.\,At + n\,(1 + \beta\ \text{Cos}\ A\,t.)\ \text{Sin}\,2\eta = 0,$$

oder $\frac{dd\eta}{dt^2} + A\,.\,A\,.\,\alpha\ \text{Sin}\ At +$

$\frac{3g\,(c^2 - b^2)}{a^2.\,e^3}\left(1 - \frac{3\gamma}{e}\ \text{Cos}\ At\right)\text{Sin}\ 2\,\eta = 0$, worinn die Buchstaben folgende Bedeutungen haben: t jene beliebige Anzahl angenommener Zeiteinheiten, an deren Ende man alles betrachtet, η = BIV jener rektifizirte Bogen *pro radio* = 1, welcher den Winkel misst, den zu Ende Zeit t die Mondshauptaxe IB mit der von I nach dem Standpunkte des Erdcentrums gezogenen IV bildet (mit IA bildet IV beständig = 90° und mit IC = 90° — η), A jene beständige Grösse, welche mit t multiplizirt die am Ende der Zeit t bestehende mittlere Anomalie des um I laufenden Erdcentrums V gibt, also A der rektifizirte Bogen *pro radio* = 1, den der *radius vector* (vom stillstehenden Mondcentro zum herumlaufenden Erdcentro in der eingebildeten Bahn gezogen) in jeder Zeiteinheit beschriebe, wenn 1) V um I in gleichen Zeiteinheiten gleiche Bögen *pro radio* = 1 beschriebe, und 2) mit dieser gleichförmigen Winkelbewegung V um I 360° in derselben Zeit beschriebe, welche in der Wirklichkeit die periodische Umlaufszeit von V um I, oder vielmehr des Mondscentrum um das Erdcentrum gibt. α die Länge der Excentrizität der Mondbahn (oder eingebildeten Erdbahn), wobei als Längeneinheit die Länge der grossen Halbaxe dieser Bahn angenommen ist. γ die Länge der Excentrizität der Mondsbahn (oder eingebildeten Erdbahn), wobei als Längeneinheit der Erdhalbmesser angenommen ist. g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, a, b, c, jene Grösse, von welcher wahr ist a^2M, b^2M, c^2M = den 3 Trägheitsmomenten im Mondskörper um die Hauptaxen IA, IB, IC, wohlgemerkt, wenn M das Gewicht einer der Erdmasse gleichen Masse an der Erdoberfläche gewogen ist, als Einheit des Gewichtes M angenommen) e die Länge der grossen Halbaxe der Mondsbahn (oder eingebildeten Erdbahn), wobei als Längeneinheit der Erdhalbmesser angenommen ist. Da γ und e in Erdhalbmes-

sern ausgedrückt sind, so ist $\frac{\gamma}{e}$ das Verhältniss der Länge der Excentrizität zur Länge der grossen Halbaxe in der Mondsbahn (oder eingebildeten Erdbahn), welches Verhältniss dasselbe bleibt, man mag bei diesen beiden Längen was immer für einerlei Längeneinheit annehmen. Dieses Verhältniss 3mal genommen gibt den negativen Werth der Zahl β.

Um die Rotation des Mondes zu bestimmen, sind für selbigen zu Ende jeder Zeit t zu bestimmen (nach den Bedeutungen der Buchstaben im IV. Kapitel) α, β, γ, ε, λ, l, φ; nun sind α, β, $\gamma = 0$, $90°$, $90°$, ein für allemal bekannt, also bleiben nunmehr ε, λ, l, φ, zu bestimmen; λ, l, φ lassen sich finden, wenn α, β, γ, ε bekannt sind nach den Gleichungen IV, V, VI. V ist gegeben, und bei der Frage, was v, ζ, η, ϑ für Funktionen von t seyen, lässt sich allemal sogleich antworten, ζ ist ein für allemal $= 90°$, $\vartheta = 90° - \eta$, es bleiben also nur v und η zu bestimmen übrig.

Ad S. 127. Z. 14. Das ist so zu verstehen: Es folgt aus $\frac{d\eta}{dt} = \pm\sqrt{m + n \text{ Cos } 2\,\eta}$ [worinn m und n so wie das Inkrementum dt beständige Grössen sind] $d\eta = \pm\, dt \sqrt{m + n \text{ Cos } 2\,\eta}$, also ist $d\eta$ um so grösser, je grösser Cos $2\,\eta$ ist, also je kleiner $2\,\eta$ oder je kleiner η ist, (denn es wird sogleich gezeigt werden, dass n eine positive Zahl sey,) d. h. je kleiner die Zahl η ist, habe η einen positiven oder negativen Werth. Es hat η einen positiven Werth, so lange V zwischen BC, hingegen einen negativen, sobald V zwischen BE fällt. $d\eta$ ist also um so grösser, je näher V an B ist (Fig. 31.)

Da die Resultate der Gleichungen I VI. (§. 107.) blos davon abhängen, was v, ζ, η, ϑ, für Funktionen von t sind, so ist es für das Gesetz der Rotation des Mondes um IA (Fig. 31.) also für seine Schwankungen um IA, ganz dasselbe, ob im Kreise um V das I, oder um I das V mit einerlei Winkelgeschwindigkeit mit einerlei *radio* = v in der Ebene der Mondshauptaxen IB, IC, laufen, da dann in beiden Fällen $\zeta = 90°$ beständig bleibt, $\vartheta = 90° - \eta$ allemal ist, und η zu Ende einerlei Zeit, einerlei Werth hat; denn der erste Fall sey durch (Taf. X. Fig. 2.) der zweite durch (Taf. X. Fig. 3.) dargestellt, und sey in beiden Fällen zu Anfange der Zeit t die Axe IB in der von I nach V gezogenen Geraden IV; zu Ende der Zeit t behaupte IB die Lage IB′, und habe im ersten Falle binnen t durchlaufen I den Bogen II′, im zweiten Falle V den Bogen VV′, so ist im ersten Falle η = VI′B′, im zweiten Falle η = V′IB′, aber

V′IB′ = VI B′, wenn IVI′ = VIV′ ist. Nehmen wir also statt der in den ersten Zeilen des (§. 110.) vorausgesetzten kreisförmigen Bewegung des Mondes um das stille stehende Erdcentrum nebst dessen mechanischen Schwanken, dieselbe kreisförmige Bewegung des Erdcentrums um das stille stehende Mondcentrum nebst demselben Schwanken des Mondes um IA $\perp$ auf der durch das Mondcentrum laufenden Kreisbahn des Erdcentrums: so ist nichts geschehen, was zu unrichtigen Rechnungsresultaten führen könnte. Dieser Voraussetzung gemäss, und jener, dass $d\eta$ jener positive oder negative Zuwachs sey, den η binnen dt erleidet, folgt: [man bemerke, dass die Bewegungen von V (Fig. 31.) im Kreise EBCDE auf B bezogen jene relativen Bewegungen sind, welche entstehen aus der *Combination* der gleichförmigen Bewegung des Erdcentrums in der eingebildeten Kreisbahn der Schwankungen von IB in der Ebene dieser Kreisbahn um die unbewegliche Axe IA]: So lange der Punkt V sich von B nach BC entfernt, oder sich dem B nach EB nähert (je nachdem V zwischen B und C oder zwischen E und B ist) ist $d\eta$ ein positiver Zuwachs oder eine negative Abnahme, also in beiden Fällen ein binnen dt durchlaufenes positives Bogenstück von EBCD relativ zu B; so lange hingegen der Punkt V sich von B nach BE entfernt oder sich dem B nach CB nähert (je nachdem V zwischen B und E oder zwischen C und B ist), ist $d\eta$ ein negativer Zuwachs oder eine positive Abnahme, also in beiden Fällen ein binnen dt durchlaufenes negatives Bogenstück von EBCD relativ zu B. Da nun $d\eta = dt \sqrt{m + n \operatorname{Cos} 2\eta}$ als Zahl um so grösser ist, je kleiner η als Zahl ist (ohne auf positive und negative Werthe zu sehen) so ist das Entfernen sowohl als das Nähern gegen jene B binnen dt um so grösser, je näher V an B ist, oder die relative Bewegung von V gegen B ist um so grösser, je näher V dem B liegt, also am grössten in den Augenblicken, wo V und B ganz zusammen fallen (ob dieses Zusammenfallen geschehe, wissen wir bisher noch nicht). Diesen Augenblick des Zusammenfallens nennt Herr Schubert die Mitte der Schwankung; in wie ferne dieser Ausdruck einen Grund aus der Natur des hier abgehandelten Gegenstandes habe, lässt sich vor der Hand noch nicht beurtheilen.

Hier liesse sich folgender Einwurf machen: Da nach den neuern geläuterten Grundsätzen der Analytiker die Differenzialien nicht als sehr kleine, doch endliche zusammengehörige Inkremente, sondern als zusammengehörige Nullinkremente, und zwar als Nullen in aller Strenge die sich nur durch ihre Koeffizienten von einander unterscheiden, betrachtet werden müssen, so kann man ja daraus, dass der Koeffi-

zient der beständigen Nulle dt nemlich $\sqrt{m + n \operatorname{Cos} 2\eta}$ durch das Abnehmen von η wachse, nicht schliessen, dass $d\eta$ ein grösserer Bogen sey, wenn η klein als wenn η grösser sey, da, streng genommen, $d\eta$ doch immer nur ein Bogen Null ist. Habe sich nemlich V dem B um 1 . 0, oder 2 . 0, oder 3 . 0, ... genähert, so hat sich im Grunde V dem B in allen diesen Fällen um gar nichts genähert. Allein darauf antworte ich: wenn $d\eta = dt \sqrt{m + n \operatorname{Cos} \eta}$, so folgt aus dem Geiste der Differenzialrechnung, wenn wir $\sqrt{m + n \operatorname{Cos} \eta} = F(\eta)$ setzen, und unter $f(\eta)$, $f(\eta)$ andere Funktionen von η verstehen,) dass $\Delta\eta = F(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + f(\eta)\,\Delta t^3 + \ldots\ldots = (F(\eta) + f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + \ldots\ldots)\,\Delta t$, woselbst $\Delta\eta$ und Δt die zusammengehörigen endlichen Inkremente von η und t andeuten, so dass also $\Delta\eta$ das Nähern oder Entfernen von V gegen B binnen Δt ganz sicher ausdrückt. Nehmen wir Δt als eine auch noch so kleine endliche Grösse an, wodurch $\Delta\eta$ auch sehr klein wird, aber immer noch endlich bleibt, so ist immer noch $\Delta\eta = (F(\eta) + f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + \ldots\ldots\ldots)\,\Delta t$. Es lässt sich aber für Δt allemal ein so kleiner aber noch immer endlicher Werth denken, dass man approximative $\Delta\eta = F(\eta)\,\Delta t$ setzen darf, wo $\Delta\eta$ die Näherung oder das Entfernen binnen Δt von V gegen B wirklich ausdrückt, welches um so grösser ist, je grösser $F(\eta) = \sqrt{m + n \operatorname{Cos} \eta}$ ist. Dass man für Δt einen besagtermaassen kleinen Werth denken könne, folgt hieraus: Soll $F(\eta) + f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + \ldots\ldots$ approximative $= F(\eta)$ seyn, so muss $f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + \ldots\ldots\ldots$ gegen $F(\eta)$ sehr klein seyn, also $= \frac{F(\eta)}{\omega}$, woselbst wir uns unter ω eine sehr grosse endliche Zahl denken, es muss also seyn $f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + \ldots\ldots\ldots = \frac{F(\eta)}{\omega}$ oder $\omega = \frac{F(\eta)}{f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 + \ldots}$, welcher grosse Werth dem ω zu geben von Δt abhängt, indem $\frac{F(\eta)}{f(\eta)\,\Delta t + f(\eta)\,\Delta t^2 \ldots\ldots}$ um so grösser wird, je kleiner Δt wird, aber immer noch endlich bleibt, so lange Δt nicht $= 0$ ist.

Ad S. 127. Z. 20. Das folgt so: Da aus Beobachtungen bekannt ist, dass uns der Mond beständig nur einerlei Seite zuwendet, so können die Schwankungen des Mondes um IA nicht anders als so vor sich gehen, dass der Punkt V (im Kreise EBVCDE, wo in allen Augenblicken die Verbindungslinie der Schwerpunkte von

Mond und Erde durchläuft) gegen den Punkt B sich nur wenig ändert; bleibt V immer auf der Seite BD, so muss V dem B einmal am weitesten, einmal am nächsten stehen, es muss also dann ein *max.* oder *min.* unter den beständigen positiven Werthen von η geben; bleibt V immer auf der Seite BE, so muss V dem B einmal am weitesten, einmal am nächsten stehen, es muss also dann ein *max.* und *min.* unter den beständig negativen Werthen von η geben, d. h. es muss ein η ein *min.* und *max.* haben: kommt hingegen V bald auf die Seite BD, bald auf jene BE, so muss V einmal am weitesten von B auf der Seite BD, einmal am weitesten von B auf der Seite BE stehen, es muss also für η ein positives *max.* und negatives *min.* geben, oder es muss η ein *max.* und *min.* geben, wo der erste Werth sich auf einen positiven, der letzte auf einen negativen Bogen bezieht. Umgekehrt folgt auch: Wenn die Rechnung beweisst, dass η ein *max.* bei $\eta = + \mathfrak{B}$ und ein *min.* bei $\eta = - \mathfrak{b}$ wird, dass V bald auf der Seite BD bald auf jener BE zu stehen kömmt, dass also V von B nie weit entfernt stehen kann; das hiesse aber mit andern Worten: könnte der geocentrische Beobachter des Mondes in allen Augenblicken, in allen Standpunkten der Erde (in der eingebildeten Kreisbahn um das Mondcentrum I, in der Ebene, worinn die Hauptaxen IB, IC liegen) von seinem Auge nach dem Mondcentrum I eine gerade Linie ziehen, so würde selbige den um I (senkrecht auf IA) beschriebenen Kreisbogen *(cum radio* = 1) EBVCD allemal in einem Punkte V schneiden, welcher von B nur äusserst wenig abstünde, d. h. der Beobachter des Mondscentrums würde immer zugleich auch die Hauptaxe IB bald etwas rechts, bald etwas links von der Geraden VI erblicken. Es folgt aber wirklich durch Rechnung, dass η ein *max.* und *min.* bei zwei Werthen von η sey, deren einer positiv der andere negativ ist; denn η ist eine Funktion von t, ist also bei jenen Werthen von t ein *max.*, bei denen $\frac{d\eta}{dt} = 0$, und $\frac{dd\eta}{dt^2} = -$, und ein *min.* bei jenen Werthen von t, bei denen $\frac{d\eta}{dt} = 0$, $\frac{dd\eta}{dt^2} = +$ ist; nun ist $\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{m + n \operatorname{Cos}^2 \eta}$, oder wenn wir $\eta = F(t)$ setzen, $\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{m + n \operatorname{Cos} 2 F(t)}$, also folgt aus $\frac{d\eta}{dt} = 0$, $\operatorname{Cos} 2 F(t) = - \frac{m}{n}$, woraus $t = k$ folgen mag, η ist dann $= F(k)$, also ist der grösste oder kleinste Werth von $\eta = F(k)$, oder da Cos 2 F(k)

$= - \frac{m}{n}$ ist, so ist der grösste und kleinste Werth von $\eta =$ $\pm \frac{1}{2}$ Arc. Cos $\left(-\frac{m}{n}\right)$, denn $-\frac{m}{n}$ ist der Kosinus eines gleich grossen positiven und negativen Bogens, da aber sowohl $+\frac{1}{2}$ Arc. Cos $\left(-\frac{m}{n}\right)$ als $-\frac{1}{2}$ Arc. Cos $\left(-\frac{m}{n}\right)$ nur sehr kleine Bogen sind, so muss 1) $-\frac{m}{n}$ ein positiver Ausdruck, also entweder die Zahl m = — und jene n = +, oder die Zahl n = — und jene m = + seyn; 2) die Zahl $\frac{m}{n}$ von 1 nur sehr wenig verschieden, daher m nur wenig kleiner als n seyn; m muss desshalb < n seyn, weil $\frac{m}{n}$ etwas kleiner als 1, aber nie grösser als 1 seyn kann, wenn nicht $\pm \frac{1}{2}$ Arc. Cos. $\left(-\frac{m}{n}\right)$ unmögliche Werthe seyn sollen, welches unserer Hypothese vom Schwanken des Mondes zuwider liefe, da ihr zufolge η einen grössten und kleinsten Werth wirklich haben muss. Nun sieht man ein, warum Hr. Schubert jenen Punkt, wo V dem B am nächsten kömmt, (wo nemlich V in B fällt) die Mitte einer Schwankung nannte.

Ad S. 128. Z. 4. Denn $\sqrt{m + n - 2n\eta^2} =$ $\frac{\sqrt{m + n - 2\eta^2}}{\sqrt{m + n}} \sqrt{m + n} = \sqrt{m + n} \sqrt{\frac{m + n}{m + n} - \frac{2\eta^2}{m + n}} =$ $\sqrt{m + n} \sqrt{1 - \frac{2n}{m + n}\eta^2}$, und setzt man $\sqrt{\frac{2n}{m + n}}\eta = z$, also $d\eta =$ $\frac{\sqrt{m + n}}{\sqrt{2n}} dz$, so ist $t = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} =$ $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ Arc. Sin $z = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ Arc. Sin $\left(\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{m + n}}\eta\right) + C$. Diese Gleichung ist wahr für alle zusammengehörigen Werthe von t und η, also auch für t = o und

$\eta = o$, also ist $o = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ Arc. Sin o + C, oder $o = \frac{1}{\sqrt{2n}} \pm i\pi + C$, (worinn i jede ganze Zahl o, 1, 2, 3, ... und π die rektifizirte halbe Peripherie *pro radio* = 1 andeutet) woraus $C = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} . i . \pi$, also ist:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\text{Arc. Sin} \left(\frac{\eta \sqrt{2n}}{\sqrt{m+n}} \right) \mp i . \pi \right),$$ hieraus ist:

$$t \sqrt{2n} = \text{Arc. Sin} \left(\frac{\eta \sqrt{2n}}{\sqrt{m+n}} \right) \mp i . \pi$$ oder:

$$\text{Arc. Sin} \frac{\eta \sqrt{2n}}{\sqrt{m+n}} = t \sqrt{2n} \pm i\pi$$ oder:

$$\frac{\eta \sqrt{2n}}{\sqrt{m+n}} = \text{Sin} (t \sqrt{2n} \pm i . \pi)$$ oder:

$$\eta = (\text{Sin} (t \sqrt{2n} \pm i . \pi)) \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{2n}}.$$

Diese Gleichungen bleiben wahr für i = o, und geben dann jene im Werke des Herrn Schubert, die aber das Transscendente der hier bestehenden Gleichungen nicht andeuten.

Es folgt aus $\eta = \sqrt{\frac{m+n}{2n}} \text{Sin} (t \sqrt{2n} \pm i . \pi)$, dass für jeden Werth von t das entsprechende η einen gleich grossen positiven und negativen Werth hat; da aber am Ende dieser gegebenen Zeit IV mit IB nicht zugleich einen positiven und negativen Winkel bilden kann, so liegt der Sinn dieses doppelten Werthes darin, dass in der ganzen Aufgabe noch unbestimmt geblieben, ob das Schwingen der IB von V aus so geschieht, dass der erste Winkel, den IB mit IV bildet, positiv oder negativ wird; geschehe das eine oder das andere, so bildet am Ende einerlei Zeit IB mit IV einerlei Winkel (den Winkel blos als Länge des rektifizirten Bogens *pro radio* = 1 betrachtet), nur in den zwei entgegen gesetzten Fällen von entgegen gesetzten Werthen. Wir sehen also hieraus: und daraus, dass der grösste positive und grösste negative Werth, den η erreicht, gleich gross ist, dass die Schwingungen von IB auf beiden Seiten von IB ganz auf einerlei Art geschehen, dass also die Zeit des Schwingens von V aus bis zum entferntesten Punkte des Schwungraums an der positiven Seite von IV und von da aus

wieder zurück nach V eben so gross sey, als die Zeit des ähnlichen Schwingens und Zurückschwingens an der negativen Seite von IV. Läuft das Mondcentrum gleichförmig um das Erdcentrum, oder umgekehrt, ist dieselbe Hauptaxe IB dem Erdcentro beständig zugewandt, und liegen die Hauptaxen IB, IC beständig in der Ebene der Mondbahn und fingirten Erdbahn um den Mond, so walten beständig dieselben Umstände für die Schwingungen von IB um IA rechts und links von IV ob, und daher gehen diese Schwingungen beständig fort auf einerlei Art vor sich, wie bei einem gewöhnlichen Pendel, das von Luft und Reibung keinen Widerstand erleidet.

Aus der Gleichung $t = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\text{Arc. Sin}\left(\eta\sqrt{\frac{2n}{m+n}}\right) \mp i\pi\right)$ folgt:

Da $\text{Arc. Sin}\left(\eta\sqrt{\frac{2n}{m+n}}\right) = F(\eta) \pm 2k\pi$ oder $= \pi - F(\eta) \pm 2k\pi$, worin k wie i jede ganze Zahl o, 1, 2, 3, ... andeutet; es ist also

$$t = \frac{1}{\sqrt{2n}}(F(\eta) \pm 2k\pi \pm i\pi) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(F(\eta) + \pi(\pm ik \pm i)) \text{ oder}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n}}(\pi - F(\eta) \pm 2k\pi \pm i\pi) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(\pi(1 \pm 2k \pm 2) - F(\eta)) =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2n}}(F(\eta) + \pi(\mp i \mp 2k - 1)),$$ oder da $\pm 2k \pm i$ so wie $\mp i \mp 2k - 1$ jede positive oder negative ganze Zahl geben kann, so ist

$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}(F(\eta) \pm I.\pi)$, worin I jede ganze Zahl o, 1, 2, . bedeutet, wobei jedoch zu merken, dass nur jene Werthe von I hierin substituirt, die dem η entsprechenden Werthe von t geben, wodurch t positiv wird, da der Natur der Aufgabe gemäss t nie negativ werden kann. Man sieht also, dass einerlei η unendlich viele entsprechende t hat, welches darum seyn muss, da IB mit IV einerlei Winkel sehr oft wiederholt.

Sehr schön ist die Uebereinstimmung mit Vorhergehendem, dass t unmöglich wird, für $\text{Cos } 2\eta > -\left(\frac{-m}{n}\right)$ oder $\text{Cos } 2\eta > \frac{m}{n}$; denn ist $\text{Cos } 2\eta = 1 - 2\eta\eta > \frac{m}{n}$,

oder $1 - 2\eta\eta = \frac{m}{n} + \omega$ [ω sehr klein], woraus $\eta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{n} - \omega\right)}$ = unmöglich, da $\frac{m}{n}$ fast $= 1$, also $1 - \frac{m}{n} - \omega$ negativ ist.

Es folgt ferner aus $t = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\text{Arc. Sin}\left(\eta\sqrt{\frac{2n}{m+n}}\right) \pm i\pi\right)$, dass $n = +$ hingegen $m = -$ seyn müsse, denn wäre $n = -$ und $m = +$ so wäre t unmöglich für jeden Werth von η; es ist also (§. 109.) $c^2 > b^2$, d. h. das Trägheitsmoment der Mondmasse um der Hauptaxe IC > als jenes um der Hauptaxe IB, welche letztere dem geocentrischen Mondbeobachter sich immer zuwendet.

In $\eta = \sqrt{\frac{m+n}{2n}}\,\text{Sin}\,(t\sqrt{2n} \pm i\pi)$ sagt Sin $(t\sqrt{2n} \pm i\pi)$ nicht mehr als Sin $(t\sqrt{2n} \pm i\pi)$ der positive oder negative Werth dieses Ausdrucks hängt blos davon ab, ob man statt i eine gerade oder ungerade Zahl setzt, und bleibt an Grösse derselbe, was man immer für eine ganze Zahl statt i darin substituirt. Man sagt also eben so viel, ob man setzt

$\eta = \sqrt{\frac{m+n}{2n}}\,\text{Sin}\,(t\sqrt{2n} + i\pi)$ oder ob man setzt $\eta = \pm\sqrt{\frac{m+n}{2n}}\,\text{Sin}\,(t\sqrt{2n})$, woraus η seinen grössten positiven und negativen Werth erreicht, wenn

$t\sqrt{2n} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$, also wenn

$t = \frac{\pi}{2\sqrt{2n}}, \frac{5\pi}{2\sqrt{2n}}, \frac{9\pi}{2\sqrt{2n}}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ wird; also ist

$\frac{\pi}{2\sqrt{2n}}$ die Zeit der ersten (und folglich jeder andern) Schwingung der Hauptaxe IB von V aus bis zur weitesten Entfernung von V. Substituirt man in

$\eta = \pm\sqrt{\frac{m+n}{2n}}\,\text{Sin}\,(t\sqrt{2n})$ statt $t = \frac{2.\pi}{2\sqrt{2n}}$, so wird $\eta = 0$, also ist die Zeit des ersten Schwingens von V aus bis zur ersten grössten Entfernung gerade so gross, als die Zeit des Zurückschwingens von dieser grössten Entfernung aus wieder nach V zurück; dasselbe gilt von jedem folgenden Schwingen auf der positiven und negativen Seite von IV. In Zeile 6 (Seite 128) versteht Herr Schubert unter t ausschliesslich die Dauer des Schwingens der Hauptaxe IB um IA von V aus bis zur grössten positiven

Digression, oder von der grössten positiven Digression bis wieder in V, oder von V aus bis zur grössten negativen Digression, oder von da aus bis wieder nach V, u. s. w.; also heisst eine Librationsperiode $= 4t$ jene Zeit, binnen welcher B von V zweimal ausläuft und nach V zweimal zurück kömmt, und zwar vom ersten Auslaufen an bis zum letzten Ankommen gemessen.

Ad S. 128. Z. 8. Wenn wir uns vorstellen, 1) dass Attraktion blos zwischen den Elementen von Mond und Erde besteht, 2) dass diese Attraktion dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist, 3) dass der Erdmittelpunkt fix steht, welches (wenn wir auch die Bewegung der Erde um die Sonne nicht in Anschlag bringen, sondern blos die Existenz von Erde und Mond annehmen) nicht Statt findet (§. 53.). Wenn wir diese Voraussetzungen annehmen, und wenn die Buchstaben π, e, g ihre bisherigen Bedeutungen behalten, so ist (§. 38.) $T = \frac{e^{\frac{3}{2}} \pi . \sqrt{2}}{\sqrt{g}\,\sqrt{f^2}}$, worin f^2 die absolute Centralkraft jenes Centralkörpers (hier die Erde) andeutet, um welche ein anderer Körper (hier der Mond) in elliptischer Bahn (denn der Kreis ist eine Ellipse von unendlich kleiner Excentricität) läuft, daher $f^2 = 1$ ist; denn die absolute Centralkraft f^2 des Centralkörpers ist der Druck, den die Attraktionskräfte aller seiner Elemente zusammen auf die Einheit der Masse in der Entfernung 1 vom Konzentrirungspunkte dieser Attraktionen ausüben; als Einheit der Masse ist aber hier die Masse der Erde, und als Einheit der Entfernungen der Erdradius (da e in Erdhalbmesser ausgedrückt ist) angenommen, daher hier f^2 das Gewicht einer Masse (der Erdmasse gleich) an der Erdoberfläche gewogen $= 1$. Noch deutlicher ist folgendes: f ist die Entfernung (§. 27.) in Erdhalbmesser ausgedrückt, in welcher der Konzentrirungspunkt der Centralkräfte des Centralkörpers auf die Einheit der Masse denselben Druck ausübt, als der Mittelpunkt der Erde auf die Einheit der Masse auf der Erdoberfläche. Hier ist der Centralkörper die Erde selbst, also $f = 1$. Man wird den Sinn des hier Gesagten nur dann fassen können, wenn man den Geist des (§. 27.) wohl inne hat, und dann wohl erwäget, was (§. 47. und 48.) über das Wort absolute Centralkraft gesagt ist. Hier liesse sich einwenden, dass man nicht einsehen könne, wie die Formel $T = \frac{e^{\frac{3}{2}} \pi . \sqrt{2}}{\sqrt{g}}$ auf die wirkliche Bewegung des Mondes um die Erde anwendbar sey, indem diese Formel nur dann richtig erwiesen sey, 1) wenn blos von einem

Centralkörper und einem angezogenen Körper die Rede ist, da doch hier der Mond nicht blos von der Erde, sondern von der Sonne und andern Planeten angezogen werde; 2) wenn der Centralkörper stille steht, da doch hier *a.* die Erde um die Sonne läuft, und *b.* eigentlich Erde und Mond um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von Mond und Erde laufen (§. 53.). Allein hierauf antworte ich:

Ad 1) Dass der Mond durch Planeten und Sonne, ganz ausnehmend aber durch letztere, merkliche Perturbationen in seiner Bahn um die Erde erleide, wird in der Folge auf eine sehr überzeugende Art gezeigt werden; man wird aber dann auch leicht einsehen, dass die periodische Umlaufszeit hiedurch von jener die in dem Falle Statt fände, wo besagte Perturbationen in der Bahn nicht beständen, nur sehr wenig abweiche.

Ad 2) *a.* Dadurch dass nebst der Bestimmung des Mondes um die Erde zu laufen, für Mond und Erde die Bestimmung besteht, sich um die Sonne gemeinschaftlich zu bewegen, kann an dem Gesetze der Umdrehungsbewegung des Mondes um die Erde in nichts verändert seyn, und es geschieht weiter nichts als dass der Mond beiden Bestimmungen zugleich folgt. Wird eine Uhr hin und hergetragen, so bleiben die Bewegungen der Räder des Werks gegen einander dieselben, als ob die Uhr an einem Orte in Ruhe geblieben wäre. Ein anderes wäre, wenn man das Uhrwerk bei seinen Rädern ergreifen möchte, und einen Theil des Werks dahin, den andern dorthin bestimmen möchte. Dass Mond und Erde einerlei Bestimmung um die Sonne haben, sieht man hieraus: Sey der grössere Kreis (Taf. IX. Fig. 5.) jener, in welchem die Erde um die Sonne läuft, und die kleinern jene, in welchen der Mond um die Erde läuft; sey binnen der periodischen Umlaufszeit des Mondes um die Erde die Erde von T bis t gelaufen, der Mond sey im Anfange dieser Zeit in L, am Ende derselben in l, so ist binnen dieser Zeit die Erde nach Tx und Ty gelaufen um Tb und bt, und der Mond nach denselben Richtungen um La und al, es ist aber $La = Tb$, und $al = bt$.

Ad 2) *b.* Nennen wir T das Gewicht der Erde, L jenes des Mondes, und nehmen folgende zwei Fälle an: einmal bewege sich L um das unbewegliche T in einer Ellipse von grosser Halbaxe $= e$, und einmal um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von T und L, so dass die relative Bahn von L und T eine Ellipse von grosser Halbaxe $= e'$ sey; nehmen wir ferner an, es sey in beiden Fällen die periodische Umlaufszeit eine und dieselbe, so ist (§. 59.) $e' : e = \sqrt[3]{T + L} : \sqrt[3]{T}$, woraus $e = e' \sqrt[3]{\frac{T}{T + L}}$. In beiden Fällen ist also die periodische Umlaufszeit (§. 38.)

$$= \frac{\pi \overline{r^2}}{r g} e^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi \overline{r^2}}{r g} e'^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{T}{T+L}} = (\S.\ 69.) = \frac{\pi \overline{r^2}}{r g} e'^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{1+0,01377}} =$$

$$0,95.\ \frac{\pi \overline{r^2}}{r g} e'^{\frac{3}{2}} = \left(1 - \frac{1}{20}\right) \frac{\pi \overline{r^2}}{r g} e'^{\frac{3}{2}},$$ welches approximative $=$

$\frac{\pi \overline{r^2}}{r g} e'^{\frac{3}{2}}$ gesetzt werden kann, und worin e' dieselbe Bedeutung hat als e im §. 110., nemlich die grosse Halbaxe der elliptischen relativen Bahn des Mondes um die Erde. Strenger genommen als in Herrn Schubert ist $4t = \frac{a.\ T}{\frac{19}{20} \sqrt{3(c^2 - b^2)}} =$

$\frac{20}{19} \cdot \frac{a.\ T}{\sqrt{3(c^2 - b^2)}}$, wodurch die von Herrn Schubert gemachte Folgerung in den letzten Zeilen des ersten Absatzes (S. 128.) nur um so richtiger wird.

Ad S. 128. Z. 11. Dass die dem geocentrischen Standbeobachter immer zugekehrte Hauptaxe IB darum länger seyn müsse als die Hauptaxe IC, weil das Trägheitsmoment der Mondmasse um IB kleiner als jenes um IC ist, folgt so: Es ist, wenn wir die Lage jedes Elements in der Mondmasse durch X, Y, Z bestimmen, wo X, Y, Z vom Schwerpunkte A aus (Fig. 23.) parallel mit AB, AC, AD, oder vom Schwerpunkte I aus (Fig. 31.) parallel mit IA, IB, IC, (und zwar X auf AB oder IA selbst von A oder I an gemessen) genommen worden, und wenn wir in (Fig. 23. oder 31.) AB, AC, AD, oder IA, IB, IC, als die 3 Hauptaxen des Mondes betrachten (§. 88.)

$Maa = B + C = \int YYdM + \int ZZdM,$

$Mbb = A + C = \int XXdM + \int ZZdM,$

$Mcc = A + B = \int XXdM + \int YYdM;$ ist also $c > b$, so ist $\int YYdM > \int ZZdM.$ Da wir nun dem Monde eine doch ziemlich regelmässige Gestalt voraussetzen, so sey z. B. wie in folgender Figur (Taf. X. Fig. 4.), worin wir I als den Schwerpunkt des Mondes, die Hauptaxe IA auf der Papiersebene senkrecht, dann IB, IC, als die zwey andern Hauptaxen des Mondes annehmen.

Hier würde also X, Y, Z von I aus nach IA, IB, IC gemessen. Beschreiben wir aus I mit dem Radius IC in Gedanken eine Kugeloberfläche C′NCK, so lässt sich von jedem mit der Ebene C′IBC parallelen Querschnitte dasselbe behaupten, als wir hier

vom Querschnitte $BC'SCB$ selbst zeigen werden. Im Kreise $C'NCK$ ist $\int YYdM = \int ZZdM$; um für den ganzen Querschnitt $C'SCBC'$ zu erhalten $\int YYdm$ und $\int ZZdM$, addire man zu $\int YYdM$ im Kreise und zu $\int ZZdM$ im Kreise die Summe der Trägheitsmom nte um $C'C$ und SB der in $C'KCBC'$ und $C'NCSC'$ liegenden Elemente, wo nothwendig erstere Summe grösser als letztere ist; Denn beschreibe aus I einen konzentrischen Kreis mit $C'KCNC'$ *cum radio* IC + einen unendlich kleinen, theile diesen unendlich dünnen Ring in unendlich viele Theile, und ziehe aus selben auf $C'C$ Senkrechte und auf SB Senkrechte, so kann man diese Theile des Rings als Elemente dM betrachten, wo sich leicht zeigen lässt, dass die Summe der Produkte der Quadrate der auf $C'C$ gezogenen Senkrechten in diese Elemente grösser sey, als die Summe der Produkte der Quadrate der auf SB gezogenen Senkrechten in dieselben Elemente (welches dann von jedem folgenden Streifen wahr ist).

Wie im folgenden Absatze für den mit der Magnetnadel verglichenen Fall $\varepsilon = 0$ wäre, begreife ich nicht, achte es aber auch nicht der Mühe werth, über einen Gegenstand viel zu grübeln, der nur zum Zwecke hat, den ursprünglichen mechanischen Zustand des Mondes zu bestimmen, den wir doch nie errathen werden.

Wenn der Mond eine gleich dichte Kugel wäre, so könnte durch die Attraktion der Erde nie ein Schwanken um IA Statt finden, denn dann würde die Attraktion der Erde gegen den Mond sich in dessen Schwerpunkte konzentriren (§. 150.), also den Mond zu keiner Drehung bestimmen können (§. 70.).

Ad S. 129. Z. 8. Der in den ersten acht Zeilen von S. 129 sehr undeutlich ausgedrückte Sinn ist eigentlich folgender: η ist eine Funktion von t, und kann jener Funktion von t gleichgesetzt werden, aus welcher durch richtige Operationen richtige Resultate erhalten worden. Setzen wir daher $\eta = h. \text{Sin } At + k. \text{Sin } 2At$, so ist diese Gleichung wahr, wenn h und k darin solche Werthe haben, und übrigens der Bau des Ausdrucks $h \text{ Sin } At + k \text{ Sin } 2At$ von der Art ist, dass dieser Werth von η, und der daraus folgende für $\frac{dd\eta}{dt^2}$ in die als richtig erwiesene Gleichung

$\frac{dd\eta}{dt^2} + A^2\alpha \text{ Sin } At + 2n\eta\,(1 + \beta \text{ Cos } At) = 0$ substituirt wirklich einen Ausdruck $= 0$ gibt; diess erfolgt nun wirklich; denn es folgt aus $\eta = h \text{ Sin } At + k \text{ Sin } 2At$,

dass $\frac{dd\eta}{dt^2} = - hA^2 \text{ Sin } At - 4kA^2 \text{ Sin } 2At$ sey, daher geben besagte Substitutionen die Gleichung $- hA^2 \text{ Sin } At - 4kA^2 \text{ Sin } 2At + A^2\alpha \text{ Sin } At + 2nh \text{ Sin } At + 2nk \text{ Sin } 2At + 2n\beta \text{ Cos } At . h \text{ Sin } At + 2n\beta \text{ Cos } At . k \text{ Sin } 2At = 0$, oder (da $2 \text{ Cos } At \text{ Sin } At = \text{Sin } 2At$ ist), $(A^2\alpha - hA^2 + 2nh) \text{ Sin } At + (2nk - 4kA^2 + hn\beta + 2kn\beta \text{ Cos } At) . \text{ Sin } 2At = 0$, oder $(A^2\alpha - hA^2 + 2nh) \text{ Sin } At + (- 4kA^2 + hn\beta + 2nk (1 + \beta \text{ Cos } At)) \text{ Sin } 2At = 0$, oder dass $= - \frac{3\gamma}{e}$ wegen der fast kreisförmigen Mondbahn sehr klein ist $(A^2\alpha - hA^2 + 2nh) \text{ Sin } At + (- 4kA^2 + hn\beta + 2nk) \text{ Sin } 2At = 0$, welche Gleichung richtig ist, wenn h und k die hiezu erforderlichen Werthe, nemlich jene haben, dass $A^2\alpha - hA^2 + 2nh = 0$ und $hn\beta + 2nk - 4A^2k = 0$ wird, d. h. wenn $h = \frac{A^2\alpha}{A^2 - 2n}$ und $K = \frac{hn\beta}{4A^2 - 2n}$ ist. Es ist also $\eta = h \text{ Sin } At + k \text{ Sin } 2At = h \text{ Sin } At + h . \frac{n\beta}{4A^2 - 2n} \text{ Sin } 2At$ $= h \left(\text{Sin } At + \frac{n\beta}{4A^2 - 2n} \text{ Sin } 2At\right) = \frac{h}{4A^2 - 2n} ((4A^2 - 2n) \text{ Sin } At + n\beta . \text{ Sin } 2At)$, oder approximative $= \frac{h}{4A^2 - 2n} ((4A^2 - 2n) \text{ Sin } At) = h \text{ Sin } At$; dass $n\beta \text{ Sin } 2At$ gegen $(4A^2 - 2n) \text{ Sin } At$ vernachlässigt werden dürfe, folgt hieraus: $(4A^2 - 2n) \text{ Sin } At + n\beta \text{ Sin } 2At = (4A^2 - 2n) \text{ Sin } At + 2n\beta . \text{ Sin } At . \text{ Cos } At$ $= \text{Sin } At (4A^2 - 2n + 2n\beta \text{ Cos } At) = \text{Sin } At (4A^2 + 2n (- 1 + \beta \text{ Cos } At))$ $= \text{Sin } At (4A^2 + 2n (- 1)) = \text{Sin } At (4A^2 - 2n)$; es ist also $\eta = \frac{A^2 . \alpha . \text{ Sin } At}{A^2 . 2n}$.

Ad S. 129. Z. 13. Um diesen zweiten Absatz (S. 129) wohl zu fassen, bedenke man, dass t von jenem Zeitmomente an gezählt wird, wo der Mond in der Erdferne ist, und dass At den rektifizirten Bogen *pro radio* = 1 ausdrückt, den binnen der Zeit t der Mond um die Erde durchlaufen würde, wenn er mit gleichförmiger Winkelbewegung in jeder Zeiteinheit den Bogen $A = \delta$ *pro radio* = 1 beschriebe, und dieselbe periodische Umlaufszeit hätte, als er bei seiner ungleichförmigen Winkelbewegung wirklich hat, ferner dass am Ende jener Zeiten, wo $At = 0$ und $At = 180°$ ist, er wirklich auch einen Bogen = 0 und einen = 180° beschrieben hat, d. h. er sich in der Erdferne und Erdnähe befindet, da die mittlere und wahre Anomalie in der Erd-

ferne und Erdnähe in einander fallen, denn er braucht zur Beschreibung des Stücks seiner Bahn aus der Erdferne bis in die Erdnähe dieselbe Zeit als zur Beschreibung des Stücks seiner Bahn aus der Erdnähe bis in die Erdferne (§. 20.). Dass zugleich in der Erdnähe und Erdferne des Mondes Geschwindigkeit in der Bahn am grössten und kleinsten sey, ist bereits (§. 35.) gezeigt worden. Dass $\delta - \frac{2n A\alpha \operatorname{Cos} At}{A^2 - 2n}$ für keinen Werth von t zu Null werden könne, folgt hieraus: Suchen wir den Werth von t, bei welchem dieser Ausdruck zu Null würde, so muss selbiger sich aus der Gleichung $\delta - \frac{2n A\alpha \operatorname{Cos} At}{A^2 - 2n} = 0$ ergeben. Hieraus ist aber $t = \frac{1}{A}$ Arc. Cos $\left(\frac{(A^2 - 2n)\delta}{2n A\alpha}\right)$, also unmöglich, da $\frac{(A^2 - 2n)\delta}{2n A\alpha} > 1$ ist; denn es ist (da $A = \delta$ ist) $\frac{(A^2 - 2n)\delta}{2n A\alpha}$ $- 1 = \frac{A(A^2 - 2n(1 + \alpha))}{2n A\alpha} = \frac{A(A^2 - 2n)}{2n A\alpha}$ (indem α gegen 1 verschwindet), also $\frac{(A^2 - 2n)\delta}{2n A\alpha} - 1 = +$, weil A^2 allemal weit grösser ist als

$n = 6\left(\frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)\frac{g}{e^3}$ wegen des ungeheuern grössern Werths von e gegen g, und da doch der Mond sehr unregelmässig in seiner Figur nicht angenommen werden kann, dass $\frac{c^2 - b^2}{a^2}$ sehr gross seyn könnte.

Ad S. 131. Z. 7. Setzt man in die Gleichungen (§. 107.) I. . . . VI., welche (mit jener $\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$) die Rotationsstörung des freischwebenden Himmelskörpers vollkommen bestimmen, statt x, y, z, a, b, c, V, v, ζ, η, ϑ, V', v', ζ', η', ϑ', V'', v'', ζ'', η'', ϑ'', ..., λ, l, φ, jene Werthe, welche am Ende jeder Zeit t der durch alle Planeten und Trabanten nebst der Sonne in der Rotationsbewegung gestörten Erde entsprechen, bezieht V, v, ζ, η, ϑ, auf die Sonne; V', v', ζ', η', ϑ', auf den Mond; V'', v'', ζ'', η'', ϑ'', eben so V''', v''', ζ''', η''', ϑ''', eben so u. s. w. auf die übrigen perturbirenden Planeten, so zeigt sich, dass in $\frac{V}{v^3} \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Cos}\vartheta +$ $\frac{V'}{v'^3} \operatorname{Cos}\eta' \operatorname{Cos}\vartheta' + \frac{V''}{v''^3} \operatorname{Cos}\eta'' \operatorname{Cos}\vartheta'' + \frac{V'''}{v'''^3} \operatorname{Cos}\eta''' \operatorname{Cos}\vartheta''' +$

$\frac{V''''}{v''''^3}$ Cos η'''' Cos ϑ'''' + ... gegen $\frac{V}{v^3}$ Cos η Cos ϑ + $\frac{V'}{v'^3}$ Cos η' Cos ϑ' vernachlässigt werden kann, u. s. w., dass also approximative zur Bestimmung der Erdrotationsstörung jene Gleichungen angenommen werden dürfen, welche Statt finden, wenn blos allein Sonne und Mond auf die Erdrotationsstörung wirken möchten. Wir stellen uns daher in diesem Kapitel vor, es bestehe im Weltall ausser Sonne, Mond und Erde (mit ihren wirklichen relativen Bogen gegen einander) nichts, und es unterliegen diese Körper dem Gesetze der allgemeinen Gravitation (§. 40. . . .).

Ad S. 131. Z. 13. Da man unter den Weltpolen zwei Punkte jener Axe versteht, um welche Axe sich alle Himmelskörper in 24 Stunden zu drehen scheinen, welche Axe im Grunde aber jene ist, worum sich die Erde binnen 24 Stunden einmal herumdreht, so ist A ein Punkt dieser Axe, worum sich die Erde dreht, und da die Erdrotation um dieselbe Axe beständig vor sich geht, welche also eine Hauptaxe ist (§. 92.), nemlich um jene Hauptaxe, welche durch die beiden abgeplatteten Pole der Erde läuft, so ist A ein Punkt dieser Hauptaxe der Erde. Zieht man demnach aus dem Mittelpunkte der Erde nach A, B, C gerade Linien, so hat man 3 Hauptaxen der Erde, die wir die Hauptaxen A, B, C nennen wollen.

Ad S. 131. Z. 15. Setzt man den Aequatorshalbmesser = (§. 91.) = Maa = $\frac{2}{5}$ MR², Mbb = Mcc = $\frac{M}{5}$ (R² + r²), oder $a^2 = \frac{2}{5} R^2$, $b^2 = c^2 = \frac{R^2 + r^2}{5}$, also $\frac{c^2 - b^2}{a^2} = 0$, $\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}$, $\frac{b^2 - a^2}{c^2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2}$.

Ad S. 131. Z. 19. Aus dem Geiste des Kapitels IV, und besonders aus demjenigen, was ich in meinen Erläuterungen zu den Gleichungen (S. 121) I, II, III, von den wegzulassenden Gliedern gesagt habe, und aus demjenigen, was ich ganz am Ende des Kapitels IV von dem Falle sage, wo mehrere perturbirende Körper V, V′, V″, ... am Ende jeder Zeit t unter den Umständen v, ζ, η, ϑ, dann v′, ζ', η', ϑ', dann wirken, folgt, dass hier (§. 112.) die Gleichungen I, II, III, ... eigentlich

so angesetzt werden müssen *): I) $dx = o$ oder $d(\varrho \operatorname{Cos} \alpha) = o$, oder da $\alpha = o$, $d\varrho = o$, also $\varrho =$ einer beständigen Grösse e, II, $dy - 6g\,f\,dt \left(\frac{V}{v^3} \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Cos} \vartheta + \frac{V'}{v'^3} \operatorname{Cos} \zeta' \operatorname{Cos} \vartheta'\right) = o$, III) $dz + 6g\,f\,dt \left(\frac{V}{v^3} \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \zeta + \frac{V'}{v'^3} \operatorname{Cos} \eta' \operatorname{Cos} \zeta'\right)$.

*) Ich halte es hier für Pflicht, meine Leser vor der in Herrn Schuberts Astronomie falschen Methode die Rotationsstörungen zu bestimmen, zu warnen. Er erhält bei Mond- und Erd-Rotationsstörungen richtige Resultate aus unrichtigen Formeln, hat aber die Richtigkeit dieser Resultate blos dem glücklichen Ungefähr zu danken, dass bei Mond und Erde $\alpha = o$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$ ist, wodurch die Glieder in den Gleichungen I, II, III, wegfallen, welche darin gar nie vorkommen können. Diese Glieder kämen daher in den Gleichungen I, II, III, für die Erd- und Mond-Rotationsstörungen auch dann nicht vor, wenn auch α, β, γ veränderliche Werthe oder nicht jene o, 90°, 90° hätten.

Geist der physischen Astronomie als Anhang zu den Erläuterungen.

I. Abschnitt.

Von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe der Bewegung und Kräfte.

§. 1. Ausdehnung, Undurchdringlichkeit, Gegenstände der Geometrie und Physik.

§. 2. Ruhe, Bewegung, Trägheit, Kraft.

§. 3. Bewegung nach gebrochener, nach krummer Linie.

§. 4. Beständige, veränderliche Kräfte, Centralkräfte; Mittelpunkt der Kräfte. Natur der Kräfte unbekannt; Stoss, Zug blosse Ausdrücke.

§. 5. Kraft, Last, bewegende Kraft P der Masse M, $\frac{P}{M}$ beschleunigende Kraft, oder Kraft der Einheit der Masse.

§. 6. Druck und Menge der Bewegung für einerlei Zeit das Maass einer Kraft.

§. 7 Bei Nicht-Centralkräften nimmt die Beschleunigung mit Masse ab, bei Centralkräften ist die Masse für Beschleunigung gleichgültig.

§. 8. 9. 10. Absolute, bewegende, beschleunigende Centralkraft; erstere der Masse des Centralkörpers proportional, und nimmt mit Entfernungen ab.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegung.

§. 11 bis 16. Wie die verschiedenerlei Bewegungen durch auf einander folgende Stösse zu erklären; müssen kontinuirlich seyn, wenn Bewegung stetem Gesetze

unterliegen soll, folgendes die Fundamentalgleichungen der Bewegungen nach stetem Gesetze.

[1) $v = \frac{ds}{dt}$, 2) $dds = dv . dt$, 3) $dv = 2g . Pdt$, 4) $dds = 2g . P : dt^2$] ; P beschleunigende Kraft während dt allein; P ein Druck auf fixen Punkt im Gewichtmaas; wobei als Einheit des Gewichts angenommen das Gewicht der nahe an Oberfläche der Erde gewogenen Einheit der Masse, wenn P′ bewegende Kraft, N Gewicht (auf Oberfläche der Erde) der Masse, so $P = \frac{P'}{N}$. Es ist $d^2s = 2g . P . dt^2$ der in Zeit dt durchlaufene Theil von ds blos durch Einfluss von P, 2mal genommen.

Eingeschobene Paragraphe aus der höhern Mechanik.

Bewegung auf vorgeschriebenen Wegen.

§. I. II. Ueber Kurve AE (Taf. IX. Fig. 2.) durch Schwere; M Gewicht, P relative Kraft in ds, $\frac{P}{M} = \frac{dy}{ds}$, also (§. 4.) $2g . \frac{P}{M} = \frac{2g . dy}{ds} = \frac{du}{dt} = \frac{udu}{ds} = \frac{dds}{dt^2}$ [dt beständig] also $2gy = \frac{u^2}{2}$ oder u nach Tangente, in der ⊥ Entfernung von der Horizontalen AN, wenn in A war $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$.

§. III. IV. φ und φ (Taf. IX. Fig. 6.) sind zwei verschiedene Winkel: ABDNTK gemeine *Cykloide*, oB des beschreibenden Kreises Radius $= a$, $Ab = x$, $bB = y$; $x = a . \varphi - a . \mathrm{Sin}\, \varphi$, $y = a - a \mathrm{Cos}\, \varphi$, ($\varphi$ in o) also $dx : dy = 1 - \mathrm{Cos}\, \varphi : \mathrm{Sin}\, \varphi = y : \sqrt{2ay - y^2}$, und $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}}$; eben so für $x = AL$, $y = LD$; sey $EF = bB = b$, so $RD = y - b$, also wenn der schwere Körper von B bis D aus Ruhestand gelaufen, und in D Endesgeschwindigkeit $= u$, so (§. I, II.) $\frac{u^2}{4g} = y - b$, oder $u = \frac{ds}{dt} = 2\sqrt{g(y-b)}$, also $dt \sqrt{\frac{2g}{a}} =$

$$= \frac{dy}{\sqrt{(2a+b)y - 2ab - y^2}}, \text{ daher } t\sqrt{\frac{2g}{a}} =$$

$$\text{Arc. Cos}\left(\frac{a + \frac{b}{2} - y}{a - \frac{b}{2}}\right), \text{ oder } t\sqrt{\frac{2g}{a}} = IOF = \varphi.$$

Demnach Zeit t von B bis N, $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, also t eine beständige Grösse bei einerlei a, es laufe der Körper aus welch immer einem Punkte B aus.

§. V. Wenn B Auslaufpunkt, in N $u = \sqrt{4g(2a - b)}$, und überhaupt $u = \sqrt{4g(y - b)}$ auf der Seite AN und jener NK, also auf gleichen senkrechten Entfernungen von AK gleiche Endesgeschwindigkeiten auf beiden Seiten; also nur bis b steigend.

§. VI. T Oscillationszeit von B bis b, $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, also $T : \sqrt{\frac{2a}{g}} = \pi : 1$, $\sqrt{\frac{2a}{g}}$ Fallzeit von E bis N aus Ruhestand.

§. VII. VIII. Wenn (Taf. X. Fig. 6.) AB = AE dieselben Cykloidalbögen als BN = NE, so wird ein in A befestigtes Pendel von der Länge $L = AN = AF + FN = 2a + 2a = 4a$ die Cykloide BNE beschreiben, und dann $T = \pi\sqrt{\frac{2a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}}$ also $T : \sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}} = \pi : 1$, $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}}$ Fallzeit durch Schwere übers halbe L; also bei zweierlei Cykloidal-Pendeln:

$$T : T' = \sqrt{L} : \sqrt{L'}.$$

§. IX. X. Da $g = \frac{\pi^2 . L}{2\,T^2}$ folgt, so lässt sich für jeden Erdstandpunkt das g mittelst Cykloidalpendels, wo L bekannt und T beobachtet wird, finden; hiedurch ist in Wien und Wienermaas gefunden g = 15, 507760 Fuss in der ersten Sekunde reien Falls. An verschiedenen Orten der Erde die Schwerkraft $P : P' = g : g' = \frac{L}{T^2} : \frac{L'}{T'^2}$.

§. XI. XII. Jede Kurve, wo z. B. $t\sqrt{2g} =$

$$\text{Arc. Cos}\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right) + B\left(\frac{a+\frac{b}{2}-y}{a-\frac{b}{2}}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wäre, gebe für $y = 2a$ für t eine konstante Grösse, unabgesehen auf die verschiedenen Werthe von b, also auch gleiche Schwingungszeiten, fange der Körper, wo immer an in dieser Kurven zu laufen. Solche Kurven zu finden

§. XIII. XIV. Kreispendel; BDE (Taf. X. Fig. 5.) Kreisbogen, grösste Erhebungshöhe $DN = a$, $BF = s$ in Zeit t aus Ruhestand aus B durchlaufen, Endesgeschwindigkeit in F zu Ende s und t, $= v$; $Fo = ds$, $DG = x$, $Gp = -dx$, $GF = y$, $FR = -dy$; (§. 16.) $v = 2\sqrt{g(a-x)}$, also (§. 4.) $ds = vdt =$ $2dt\sqrt{g(a-x)}$, also $dt = \frac{ds}{2\sqrt{g(a-x)}}$.

Nun $ds : dx = r : y$, also $dt = \frac{-rdx}{2\sqrt{g(a-x)(2r-x)x}} =$

$$\frac{-rdx\left(1+\frac{x}{4r}+\frac{3x^2}{32 \cdot r^2}+\ldots\ldots\ldots\right)}{2\sqrt{2gr \cdot x(a-x)}} =$$

$$\frac{-rdx\left(1+\frac{x}{4r}\right)}{2\sqrt{2grx(a-x)}},$$ da x gegen r sehr klein angenommen ist, also:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{2gr}}\int\frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} + \frac{r}{2\sqrt{2gr}}\int\frac{-dx}{\sqrt{x(a-x)}} \cdot \frac{x}{4r} =$$

$$\frac{r}{2\sqrt{2gr}}\,\text{Arc. Cos}\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) + \ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{r}{2\sqrt{2gr}}\cdot\varphi + \frac{r}{2\sqrt{2gr}}\cdot\int\left(\frac{\frac{a \cdot d\varphi\,\text{Sin}\,\varphi}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\,\text{Cos}\,\varphi\right)}{4r\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\,\text{Cos}^2\varphi}}\right),$$

$t = \sqrt{\frac{r}{8g}}\left(\varphi\left(1 + \frac{a}{8r}\right) + \frac{a}{8r}\ \mathrm{Sin}\ \varphi\right) + C$, wo $C = 0$; für $x = 0$ ist:

$\varphi = A.C\left(\frac{0 - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = AC\,(-1) = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \ldots\ldots$, also:

$t' = \pi\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right),\ 3\pi\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right),\ 5\pi\sqrt{\frac{r}{8r}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right), \ldots$

$\ldots\ldots$, für $x = a$ ist $\varphi = A.C.\left(\frac{a - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = A : C : (+1) = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, also:

$T = 0\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right),\ 2\pi\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right),\ 4\pi\sqrt{\frac{a}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right), \ldots$

$\ldots\ldots\ldots$ Also jede halbe Schwingungszeit von B bis D, von D bis E, von E bis D, $\ldots\ldots = \pi\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right)$, jede ganze Schwingungszeit von B bis E, von E bis B, $\ldots\ldots\ldots = 2\pi\sqrt{\frac{r}{8g}}\left(1 + \frac{a}{8r}\right) =$

$[r = L]\ \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}} + 2\pi\sqrt{\frac{a^2}{8^3.\,g.\,L}}$, also um $2\pi\sqrt{\frac{a^2}{8^3.\,g.\,L}}$ grösser, als wenn B D E eine Cykloide wäre. Bei Cykloiden-Sekundenpendeln $\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}} = 1$, also $L = 3,14, \ldots\ldots$ Wiener Fuss in *loco* Wien, ist bei Kreispendeln r eben so gross, und $BD = b$ sehr klein, also $a : b = b : 2r$, so:

$T = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r}{g}} + \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r}{g}}.\ \frac{a}{8r} = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r}{g}} + \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r}{g}} \times$

$\frac{b^2}{16.\,r^2}$, also dessen Verspätung d in 24 Stunden = 86400 Sekunden, $d = 86400 -$

$$-\frac{86400}{1+\left(\frac{b}{4r}\right)^2} = \frac{86400\left(\frac{b}{4r}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{4r}\right)^2}$$ Sekunden Verspätungsskala bei astronomischen Kreispendeln doch sehr genau, wenn b klein. Beispiel

§. XV. bis XIX. Die Körper A, B, D (Taf. X. Fig. 7. in unverschiebbarem Zusammenhange gegen einander, um Axe E drehbar zu Ende Zeit t. Geschwindigkeit des Punktes N = w oder da E N = 1, Winkelgeschwindigkeit = w, so absolute Geschwindigkeiten von A, B, D, = aw, bw, dw. Wenn während dt Gewicht A durch Kraft P′ in Entfernung p von E, dv′, eben so B durch P″, dv″, also

so $dv' = \frac{2g \,.\, Pp'}{a \,.\, A} dt$, $dv'' = \frac{2g \,.\, P'' \,.\, p}{b \,.\, B} dt$, ... oder

$dw' = \frac{2g \,.\, P' \,.\, p}{a^2 A} dt$, $dw'' = \frac{2g\, P'' \,.\, p}{b^2 \,.\, B} dt$, da $\frac{dv'}{a} =$ dw, ... also $dw' + dw''$ oder dw = ... oder

$$\frac{dw}{2g \,.\, dt} = \frac{P'p + P''p + \ldots\ldots}{a^2A + b^2B + \ldots\ldots} = \frac{P \,.\, p}{a^2A + b^2B + \ldots}$$

[P = P′ + P″ + P‴ + ... in Entfernung p von E, wo P′ blos A, P″ blos B bewegt]; eben so wenn Q in Entfernung q, R in Entfernung r, . .

$\frac{dW.}{2g\, dt} = \frac{Q \,.\, q}{a^2A + b^2B + \ldots}$, $dW' = \frac{Rr}{a^2A + b^2B + c^2C +}$, ...

also $\frac{dw + dW + dW'}{2g\, dt}$ oder $\frac{dW}{2g \,.\, dt} =$

$\frac{Pp + Qq + Rr + \ldots\ldots\ldots}{a^2A + b^2B + c^2C + \ldots\ldots\ldots}$; a^2A, b^2B, immer positiv; Pp, Qq = + oder —, nemlich alle die Bewegung nach einerlei Richtung = +, die nach entgegengesetzter Richtung Bewegung geben, = — P, Q, R, ... immer nach Tangenten der Kreise um E, P, Q, R, ... p, q, r, ... , A, B, C, ... a, b, c, ... können alle veränderlich seyn, und sind dann jene Werthe blos während dt. Beispiel darüber.

§. XX. XXI. Dass während dt, P, Q, R, ... nach den Tangenten der Kreise um E an den Radien p, q, r, ... angenommen, so gleichgeltend mit dem Falle, wo P, Q, R, ... an einerlei Graden En des unbeugsamen Systems ⊥ auf En in Entfernungen p, q, r, ... positiv und negativ, wie an den ursprüng-

lichen $\overset{\text{R Q S P}}{\underset{r}{}\text{———}\top\top\top\top\text{———}\underset{E}{}}$ Radien von E wirken; ist S Schwerpunkt dieser Kräfte, so ist $E\,S = \frac{P.p + Q.q + Rr + \ldots\ldots}{P + Q + R + \ldots\ldots}$, also $P.p + Q.q + R.r + \ldots\ldots = ES\,(P + Q + R + \ldots\ldots)$, wo die negativ wirkenden Kräfte mit Zeichen — gesetzt werden müssen.

§. XXII. XXIII. M, M′, M″, Gewichte in unverschiebbarem Zusammenhange, um C drehbar. Momente der Trägheit $= M.\,CM^2 + M'.\,CM'^2 + M''.\,CM''^2$; sey deren Schwerpunkt in G, so $M.\,CM^2 + \ldots\ldots = M.\,MG^2 + M'.\,M'G^2 + M''.\,M''G^2 + (M + M' + M'')\,GC^2$; denn $M.\,MC^2 = M\,(MO^2 + OC^2) = \ldots\ldots = M.\,MG^2 - M.\,OG.\,CG - M.\,O\,C.\,CG$, eben so M', $M'C^2 = \ldots\ldots$, eben so $M''.\,M''C^2 = \ldots\ldots$ also deren Summe $= \ldots\ldots$, wobei zu merken, dass $(- M.\,GO + M'GO' + M''.\,GO'') = o$, ferner, dass $-M.\,OC + M'.\,OC + M''.\,O''C = (M + M' + M'')\,GC$, ... Also:

$$\frac{dW}{2g\,dt} = \frac{P.p + Q.q + \ldots\ldots}{a^2A + b^2B + \ldots\ldots} = \frac{\surd\,(P + Q + \ldots\ldots)}{s^2.A + s'^2B + \ldots\ldots(A + B + \ldots)\,\sigma^2}.$$

Schwerpunkt der Kräfte P, Q, R, ... während dt, und jener der Gewichte A, B, C, ... nicht nothwendig einerlei Punkt. Hier folgen Trägheitsmomente um Schwerpunkt in verschiedenen Fällen (gleiche Dichtigkeit).

.........

Drittes Kapitel.

Von Centralkräften.

§. 17 bis 21. Die Masse M (Taf. XII. Fig. 5.) als Einheit der Masse, und in einem Punkt konzentrirt angenommen, habe Geschwindigkeit nach gerader Linie $\alpha\beta$, und in C sey Centralkraft, so M in Kurven AMm laufend, worinn $\alpha\beta$ Tangente. Zusammengehörige Funktionen: t, v; Winkelgeschwindigkeit w von R wenn $CR = 1$, $AM = s$, Sektor $ACMA = S$, Winkel $ACM = \varphi$, $MC = r$, $CN = x$, $NM = y$, $CT = u \perp PT$. Zusammengehörige Nullinkremente dt, dv, dw, $Mm = ds$, Sektor $MCmM = dS$, Winkel $MCm = d\varphi$, $M\mu = dr$, $No = dx$, $lm = dy$, du; dann ist: 1) $ddx = -2g\,P.\,dt^2.\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, 2) $ddy = -2g.\,Pdt^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, aber, 3) $ddy \times \mathrm{Cos}\,\varphi - ddx\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 2dr.\,d\varphi + r.\,dd\varphi$, 4) $ddy.\,\mathrm{Sin}\,\varphi + ddx.\,\mathrm{Cos}\,\varphi = ddr - r.\,d\varphi^2$, also: 3) $2dr\,d\varphi + rdd\varphi = o$, 4) $ddr - r.d\varphi^2 = -2g.\,P.\,dt^2$, 5) $r.\,r.\,d\varphi = A.\,dt$, $A =$ *Constante*, 6) $dr^2 + \frac{A^2.\,dt^2}{r.\,r} + 4g.\,dt^2 \int P.\,dr +$

$B \cdot dt^2 = o$, $B = Constante$]. Da $\int r \cdot r\, d\varphi = At$ oder: $\int \frac{r.r.d\varphi}{2}$ $= \frac{At}{2}$, so ACMA $= \frac{At}{2}$ oder: $\int = \frac{A.t}{2}$ also $S : S' = t : t'$.

Da $ds : rd\varphi = r : u$, so $v = \frac{A}{u}$, oder $v : v' = u' : u$, und hieraus $w : w' = r'^2 : r^2$; $w = \frac{A}{r^2}$.

§. 22. Diess nicht nur wahr von jeder Centralkraft, sondern auch nur wahr, wenn in C eine Centralkraft; denn blos geometrisch wahr ist $r \cdot r \cdot d\varphi = xdy - ydx$; aus der dynamischen Annahme aber $rrd\varphi = Adt$ folgt dann $xdy - ydx = Adt$, also $d^2y : d^2x = y : x$; daher dy, dx nicht beständig, also Wirkung von Kräften N, M nach x und y, die eine mittlere Kraft geben, nach c, da

$$M : N = d^2y : d^2x = y : x.$$

II. Abschnitt.

Kepplerische Gesetze.

Erstes Kapitel.

Gesetz der Centralkraft der Sonne.

§. 23. 24. Auf die genauen Beobachtungen über den Lauf der Planeten um die Sonne von Keppler, Huygen, Galilei, Hooke, sich stützend, gründete Newton die Theorie der physischen Astronomie; eigentlich auf folgende 3 Kepplerischen Gesetze:

1) Die Planeten beschreiben Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpunkte die Sonne ist.
2) Die elliptischen Sectoren sind den Beschreibungszeiten proportional.
3) Die Quadrate der periodischen Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die Kubi der grossen Axe ihrer Ellipsen.

§. 25. Aus № 2. folgert Newton (§. 22.), dass in der Sonne die Centralkräfte residiren.

§. 26. Aus № 1. folgt, (wenn bei elliptischer Bahn a, b, grosse, kleine Axe, r *radius vector*, c Excentrizität) $r = \frac{b^2}{a - c \cdot \mathrm{Cos}\, \varphi}$. Nun ist (§. 18, 4, 5.)

$dt = \frac{r^2\, d\varphi}{A}$, also 7) $2g\,P = \frac{A^2\,(r.\,d\varphi^2 - ddr)}{r^4.\,d\varphi^2}$, ... (§. 18. 3.)

$d^2r = -\frac{c.\,r^2.\,d\varphi^2.\,Cos\,\varphi}{b^2}$, also $r d\varphi^2 - d^2r =$

$= \frac{a.\,r^2.\,d\varphi^2}{b^2}$, also (7.) $2g.\,P = \frac{A^2.\,a}{b^2.\,r^2}$ oder:

$P = \frac{A^2.\,a}{2.\,g.\,b^2.\,r^2}$, also $P : P' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2} = r'^2 : r^2$, also die beschleunigenden Kräfte wie umgekehrt die Quadrate der Entfernungen bei der Sonnencentralkraft.

§. 27. Konstante A keinen Bezug auf Ellipse nach Gesetz der Centralkraft, blos abhängig von jedesmaliger Grösse der absoluten Centralkraft (§. 8.), $A = bf\sqrt{\frac{2g}{a}} = f\sqrt{e.\,g}$ [p = Erdengewicht von M oder dessen Gewicht in Entfernung von Sonne r = f, so $p : P = r^2 : f$] ϱ Erdhalbmesser, so auch $p : P = \varrho^2 : f^2$, wo aber P das Gewicht von M in Entfernung $r = \varrho$ von Sonne; also $\varrho^2 : f^2$ das Verhältniss der Centralkraft der Erde zu jener der Sonne C = Centralkraft der Sonne; so $C = f^2$, wo als Einheit der Centralkräfte die Centralkraft der Erde, und als Einheit der Entfernung der Erdhalbmesser angenommen, bei beliebiger Längeneinheit $C = \frac{f^2}{\varrho^2}$, und bei beliebiger Längen- und Zeit-Einheit aber besagte Centralkraft-Einheit: $C = \frac{2.\,a^3\,\pi^2}{\varrho.\,\varrho.\,g.\,T^2}$ [T Zeit eines periodischen Umlaufs des Planeten].

§. 28. $\frac{a^3}{T^2} = \frac{g}{2\pi^2}.\,C$, $\frac{a'^3}{T'^3} = \frac{g}{2\pi}\,C$) also $T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3$ also drittes Kepplerisches Gesetz Folge des Newtonischen Attraktions-Gesetzes.

Auch von einer Planetenbahn zur andern beschleunigende Kräfte umgekehrt wie Quadrate der Entfernungen vom Centralpunkte, da [P, Q im Aphelium] $P : Q = SQ^2 : SP^2$; letzteres so bewiesen: (Taf. XI. Fig. 1.) $P\pi = g.\,P.\,dt^2$. $Q\xi = g.\,Q.\,dt^2$ (§. 16.), also $P : Q = P\pi : Q\xi$. Nun $P\pi = [Sp = \frac{A^2 - C^2}{A - C\,Cos\,d\varphi}$, $Cos\,d\varphi = 1 - \frac{1}{2}\,d\varphi^2] = \frac{A\,(A + C)}{2\,(A - C)}\,d\varphi^2$; ferner $dS = \frac{E.\,dt}{T}$, also:

$P\pi = \frac{2A^3 . \pi^2 . dt^2}{T^2 (A + C^2)}$, also $P : Q = \frac{A^3}{T^2 (A + C)^2} : \frac{a^3}{\tau^2 (a + c)^2}$, also (drittes Kepplerisches Gesetz) $= (a + c)^2 : (A + C)^2 = SQ^2 : SP^2$. Das Gewicht eines Planeten gegen die Sonne ist seiner Masse, und umgekehrt dem Quadrate seiner Entfernung proportional. Durch das zweite Kepplerische Gesetz wurde das Daseyn, durch das erste und dritte das Gesetz der Centralkraft der Sonne erwiesen.

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Planetenbahnen aus dem Gesetze der Attraktion.

§. 29. Für Attraktionsgesetz zwar nur Beweis *per inductionem*, dessen Richtigkeit zu bezweifeln aber angenommen werden müsste, beschleunigende Kraft der Sonnen- und Centralkraft als *functio discontinua*. Attraktionsgesetz *a priori* erwiesen, möchte die physische Astronomie zu einem Theile der reinen Mathematik schaffen.

Die Hypothese des Ausstrahlens der Centralkraft wie das Licht bei einem leuchtenden Punkte desshalb nicht verwerflich, weil Menge der Beleuchtung der Fläche, und Menge der Attraktion der Masse proportional, wenn man bemerkt, dass die Lichtlinie nur bis auf den nächsten dunkeln Punkt, die Attraktionslinie hingegen durch alle materielle Punkte wirkt.

Das Attraktionsgesetz ein durch Kepplerische Beobachtungen und darauf gegründete Rechnung ausgemachtes Naturgesetz. Müssen aber darum die Planeten in Ellipsen laufen? Wäre der Lauf eines Körpers um die Sonne nach einer andern Kurven ein Einwurf gegen diess Naturgesetz? Nun werden die Gesetze der Bewegung um einen Centralpunkt gesucht, die *a priori* aus diesem Naturgesetze folgen.

§. 30. $P = \frac{f^2}{r^2}$ (§. 27.) also $\int P dr = \frac{f^2}{r^2}$, also (§. VI.) $dt = ...$,

also (V.) $d\varphi = \frac{A dr}{. . . —} = (r = \frac{m^2}{n}$ gesetzt$) =$. . .

$$- \frac{A du}{\sqrt{(- A^2 u^2 + 4 g . f^2 . m^2 . u - B . m^4)}} = - \frac{A . du}{Z}; \text{ also } \frac{Z^2}{A^2} =$$

$$- \left(u^2 - \frac{4 g . f^2 . m^2 . u}{A^2} + \frac{B m^4}{A^2}\right) = ... \text{ in Faktoren aufgelöst, also}$$

$$Z^2 = (2 g f^2 = n^3, n^6 - A^2 B = k^6) = \frac{m^4 . k^6}{A^2} - \left(\frac{m^2 . n^3}{A} - A . u\right)^2, \text{ also}$$

$d\varphi = \ldots\ldots$, und $\varphi = C + \text{Arc. Sin}\left(\frac{m^2.\, n^3 - A^2.\, u}{m^2.\, k^3}\right)$; r für $\varphi = o$ willkürlich, also auch u willkürlich, sey für $\varphi = o$, $u = \frac{m^2}{A^2}(n^3 - k^3)$, also $\varphi = \text{Arc. Cos}\left(\frac{m^2.\, n^3 - A^2.\, u}{m^2.\, k^3}\right)$, also $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3.\, \text{Cos}\,\varphi}$, welches nicht imaginär wenn k^3 reell, nemlich nicht $n^3 < A\sqrt{B}$, wo dann (Taf. XII. Fig. 5.) AMm darnach konstruirt werden kann; k^3 kann daher nicht imaginär seyn, wenn um Centralkraft C wirklich Bewegung vor sich geht. Schneidepunkte zu Ende $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3.\, \text{Cos}\,\varphi}$ und $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3.\, \text{Cos}\, 180}$ und nur da; für $\varphi = + \alpha \pm h.\, 2\pi$ und $\varphi = - \alpha \pm h.\, 2\pi$ ein gleich grosses r, also nur ein Ast über und unter PB, die beide einander ähnlich und gleich. Also [senkrechte Ordinate y]

$$y = \pm \sqrt{\left(x - \frac{A^2}{n^2 - k^3}\right)\left(x - \frac{A^2}{n^3 + k^3}\right)}, \text{ also}$$

$$y^2 = \left(x - \frac{A^2}{n^3 - k^3}\right)\left(x - \frac{A^2}{n^3 + k^3}\right),$$ also AMm Kurve des zweiten Grades, PB eine Achse, deren Länge $= \frac{A^2}{n^3 - k^3} + \frac{A^2}{n^3 + k^3}$.

§. 51. $\left(d\varphi = - \frac{A.\, du}{\sqrt{z^2}}, \left(du = - \frac{d\varphi \sqrt{z^2}}{A}\right) d\left(\frac{m^2}{r}\right) = \frac{d\varphi}{A}\sqrt{-\left(A^2.\frac{m^4}{r^2} - 2\,m^2.\, n^3.\, \frac{m^2}{r} + B\,m^4\right)}\right)$, also jene Werthe von r imaginär, wodurch $A^2.\, \frac{m^4}{r^2} - \ldots\ldots = +$. Nun aber wird $A^2.\, \frac{m^4}{r^2} - \ldots\ldots = o$ bei $r = \frac{A^2}{n^3 + k^3}$ und $\frac{A^2}{n^3 - k^3}$, also alle möglichen Werthe von r zwischen $\frac{A^2}{n^3 + k^3}$ und $\frac{A^2}{n^3 - k^3}$.

Da $\frac{A^2}{n^3 + k^3} = p$ und $\frac{A^2}{n^3 - k^3} = q$, a bei r für $\varphi = 180$ und $\varphi = o$, so die Achse PB durch Perihelium und Aphelium, also Absidenlinie, und φ wahre Anomalie.

§. 32. CN = v, NM = y, CM = r, ACM = φ, gibt

$\left(\text{da } r = \frac{A^2}{n^3 - k^3 \operatorname{Cos}\varphi}\right)$ $4g^2. f^4. y^2 + A^2. B. v^2 - 2A^2. v. \sqrt{4g^2. f^4 - A^2. B} -$

$A^4 = o$; für $y = o$, $v = \frac{A^2}{n^3 - k^3} = CA = q$, $v = -\frac{A^2}{n^3 + k^3} = CB = p$.

Für $AN = x$, $y = q - x$, ... ist $y^2 = \frac{A^2}{gf^2} . x - \frac{A^2}{gf^2} : \frac{4g. f^2}{B} . x^2 =$

$\mathfrak{P}. x - \frac{\mathfrak{P}}{2a} x^2$, also AMm ein Kegelschnitt vom Parameter $\frac{A^2}{g. f^2}$ und Abscissenachse

$\frac{4g. f^2}{B}$, also Ellipse, Hyperbel, Parabel, je nachdem $\frac{4g. f^2}{B} = +, = -, = \infty$.

Es ist $\frac{4g. f^2}{B} = q + p = \frac{A^2}{n^3 - k^3} + \frac{A^2}{n^3 + k^3}$.

§. 33. f in einerlei Sonnensystem unabänderlich, unabhängig von jeder individuellen Planetenbahn. Individuelle Planetenbahn abhängig 1) von Grösse und Richtung der ursprünglichen Tangentialgeschwindigkeit, und 2) Entfernung derselben von C. (§. 18, 19); A in Rechnung gekommen aus allgemeinen Eigenschaften durch Centralkraft, B blos durch deren angenommenes Gesetz; A und B bestimmt bei bestimmten Elementen $\mathfrak{P}$ und a des Kegelschnitts; also A und B auf zweierlei Art bestimmbar; also auch der Kegelschnitt der individuellen Bahn bestimmbar, aus Bestimmung der individuellen zwei Eigenschaften der Tangentialgeschwindigkeit, also blos aus der Grösse der Tangentialgeschwindigkeit im Aphelium, und aus der Grösse q.

§. 34. Statt $\mathfrak{P}$ um e Bahn, Ellipse, Hyperbel, Parabel, je nachdem $B = +$, $= -$, $= o$; Kreis wenn $A^2 = 2a. g. f^2$. Hier $e = \frac{A^2}{g. f^2}$, $a = \frac{2g. f^2}{B}$, $A^2 = 2g. f^2$, $B = \frac{2g. f^2}{a} = \frac{2A^2}{a. e}$; alles dies nur wahr bei Voraussetzung $P = \frac{f^2}{r^2}$. Kreis bei jedem Gesetze möglich.

$$\text{Da } p = \frac{e}{2 + \sqrt{\frac{4a - 2e}{a}}},\ q = \frac{e}{2 - \sqrt{\frac{4a - 2e}{a}}},\ \text{so für}$$

$a = \infty$, $p = \frac{e}{4}$, $q = \infty$, für $e = \frac{2b^2}{a}$, $p = a - c$, $q = a + c$, also C ein Brennpunkt des jedesmaligen Kegelschnittes. Was von Sonne wahr ist (§. 26.).

§. 35. (Fig. 1.) $ds = [\text{da } n^3. r - k^3. r \operatorname{Cos}\varphi = A^2$ (§. 30.)$] =$
$\frac{r^2 d\varphi \sqrt{(n^6 - 2n^3. k^3. \operatorname{Cos}\varphi + k^6)}}{A^2}$ [da (§. 19.) $r^2 d\varphi = A dt] = \frac{ds}{dt} = v =$
$\frac{\sqrt{(n^6 - 2n^3. k^3. \operatorname{Cos}\varphi + k^6)}}{A}$, am kleinsten und grössten für $\varphi = 0, = 180$, im Aphelium und Perihelium; mittlere Geschwindigkeit ungefähr $= \frac{\sqrt{(n^6 + k^6)}}{A}$ für $\varphi =$ $90^\circ = 270^\circ$. Im Aphelium $r = c' = \frac{n^3 - k^3}{A} = \frac{A}{q}$, im Perihelium $r = c = \frac{n^3 + k^3}{A} = \frac{A}{p}$, also $A = c'. q = c. p$, woraus A bestimmbar bei Beobachtung im Aphelium oder Perihelium.

§. 36. $c = \frac{c^2. p^2}{g. f^2}$, $p = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, aber $b^2 = \frac{1}{2}$ a. e, also $a^2 - \frac{ae}{2} = \ldots\ldots$ also $a = \frac{2p^2}{4p - e} = \frac{2g. f^2. p}{4g. f^2 - c^2. p}$, und $B = \frac{2g. f^2}{a} =$ $\frac{4g. f^2 - c^2. p}{p}$. Also (§. 34.) Bahn, Ellipse, Hyperbel, Parabel, Kreis, wenn $c < 2f\sqrt{\frac{g}{p}}$, $c > 2f\sqrt{\frac{g}{p}}$, $c = 2f\sqrt{\frac{g}{p}}$, $c = f\sqrt{\frac{2g}{p}}$, also Geschwindigkeiten im Perihelium bei einerlei p in Parabel und Kreise $= \sqrt{2} : 1$, welches bei Kometen anwendbar. Da $P = \frac{f^2}{r^2}$ (§. 30.), so im Perihelium $P = \frac{f^2}{p^2}$, oder $P'. p = \frac{f^2}{p}$, also Bahn: Ellipse, Hyperbel, Parabel, Kreis, wenn $c^2 <, >, = 4g. p. P'$, oder $= 2g. p. P'$ (Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{4g}$), also wenn $h <, >, = p. P'$, oder $= \frac{p. P'}{2}$; also Kreis wenn $h : \frac{p}{2} = P' : 1$ [1 beschleunigende Kraft der Erdcentralkraft auf der Erdoberfläche]. Habe die elliptische, parabolische, hyperbolische Bahn Perihelium in B, so ist (x von B nach A) bei Ellipse, Parabel, Hyperbel:

$$y^2 = \frac{c^2. p^2}{g. f^2} x - \frac{c^2. p\,(4g. f^2 - c^2. p)}{4g^2. f^4}. x^2,\quad Y^2 = \frac{c^2. p^2}{g. f^2}. x;$$

$$y'^2 = \frac{c^2. p^2}{g. f^2} x - \frac{c^2. p\,(4g. f^2 - c^2. p)}{4g^2. f^4} x^2,$$ für einerlei c und p. Es kömmt

y^2 und Y^2 näher beim Abnehmen von $c^2. p$, erreicht es aber nie; y'^2 kömmt Y^2 näher beim Abnehmen von $c^2. p$, und erreicht es wenn $c^2. p < 4g. f^2$; bei Hyperbel $c^2. p > 4g. f^2$; also parabolische Bahn von Parameter $\frac{c^2. p^2}{g. f^2}$ Asymptote der elliptischen Bahn von demselben Parameter. Nicht so hyperbolische Bahn Eben so im Aphelium $c'c' <$ oder $= 4g. q. P''$. für Ellipse oder Kreis. (Also auf Entfernung r senkrechte Wurfgeschwindigkeit $= v$, und $v^2 < 4g. P. r$ bewirkt Ellipse, und Endpunkt von r entweder Perihelium oder Aphelium, je nachdem $\left[h = \frac{v^2}{4g}\right]$ $2g. h >$ oder $< \frac{2g. P. r}{2. 2g}$ dann $A. \alpha =$ (Taf. X. Fig. 8.) $= v dt$, $a\alpha = g. P. dt^2$, $S\alpha - r = \frac{v^2 - 2g. P. r}{2r}. dt^2$.

§. 37. Aus (§. 35.) $A = c. p$, (§. 34.) $e = \frac{A^2}{g. f^2}$, ist $e = \frac{c^2. p^2}{g. f^2} = \frac{4h. p^2}{f^2} = \frac{4h}{P}$ (§. 36.) und $a = \frac{2g. f^2. p}{4g. f^2 - c^2. p}$ (§. 36.) $= \frac{f^2. p}{2f^2 - 2hp} = \frac{P'. p^2}{2(P'. p - h)}$. Hieraus gefolgerte Proportionen und Gesetze, besonders in Bezug der Parabel, wo $e = 4p$, also $p = \frac{4g. f^2.}{c} = \frac{f^2}{h}$ und des Kreises wo $e = 2p$, also $p = \frac{2g. f^2}{c^2}$. Uns am wichtigsten die Ellipse, welche die Bahn aller uns bekannten Weltkörper.

§. 38. Wenn Planetenbahn Ellipse $\left(\text{also } e = \frac{2b^2}{a}, A = f\sqrt{g. e}, B = \frac{2g. f^2}{a}\right)$ deren Fläche $= ab\pi$, so $ab\pi = \frac{A. T}{2}$ (§. 20.) also $T^2 = \frac{a^3. 2\pi^2}{g. f^2}$, $T^2 : \tau^2 = \frac{a^3. 2\pi^2}{g. f^4} : \frac{\alpha^3. 2\pi^2}{g. f^2} = a^3 : \alpha^3$, welches das dritte Kepplerische Gesetz. Ist m der mit mittlerer Winkelgeschwindigkeit beschriebene Bogen *pro radio* 1, in jeder Zeiteinheit, so $m = \frac{2\pi}{\tau}$, also $f^2 = \frac{a^3. m^3}{2g}$ [f *vide* §. 27.].

Bei elliptischen Bahnen um zweierlei Centralkräfte P, Q $\left(P = \frac{f^2}{r^2}, Q = \frac{f'^2}{r^2},\right.$ $\left.P : Q = f^2 : f'^2\right)$; $T^2 : \tau^2 = \frac{a^3}{f^2} : \frac{\alpha^3}{f'^2} = \frac{a^3}{P} : \frac{\alpha^3}{Q}$; ferner $m = \frac{2\pi}{T}$, $n = \frac{2\pi}{\tau}$, also $m^2 : n^2 = \tau^2 : T^2 = \frac{P}{a^3} : \frac{Q}{\alpha^3}$, $a^3. m^2 : a^3. n^2 = P : Q$, (m, n mittlere Ge-

schwindigkeiten), oder $P : Q = a^3 . \tau^2 : \alpha^3 . T^2$, wornach das Verhältniss zweier absoluten Centralkräfte oder der Masse der Centralkörper bestimmt wird, z. B. Sonne, und Planet mit Trabanten.

§. 39. Aus (§. 30. 34.) ist $v = \frac{2fg\sqrt{\left(1 - \text{Cos}\,\varphi\sqrt{\frac{4a - 2e}{a}} + \frac{2a - e}{2a}\right)}}{\sqrt{g.\,e}}$, oder (wenn γ die Zahl ist, welche so viel Einheiten enthält, als a in der Excentrizität enthalten ist, also $\frac{2a - e}{a} = 2\gamma^2$), $v = \frac{2fg\sqrt{(1 - 2\gamma.\,\text{Cos}\,\varphi + \gamma^2)}}{\sqrt{g.\,e}} =$ $\frac{2f.\sqrt{g}}{\sqrt{e}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^4}{64} - \gamma\left(1 - \frac{\gamma^2}{8}\right)\text{Cos}\,\varphi\ \ldots\ldots\right) =$ $m.\,a.\left(1 + \frac{3}{4}.\,\gamma^2 + \frac{33}{64}.\,\gamma^4 - \gamma\,(1 + \frac{3}{8}\,\gamma^2)\,\text{Cos}\,\varphi - \frac{\gamma^2}{4}\left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)\text{Cos}\,2\varphi - \frac{\gamma^3}{8}.\,\text{Cos}\,3\varphi - \frac{5}{64}.\,\gamma^4.\,\text{Cos}\,4\varphi + \ldots\ldots\ldots\right)$, da $\frac{2f.\sqrt{g}}{\sqrt{e}} =$ $m.\,a.\,\frac{1}{(1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}} = ma\,(1 + \frac{1}{2}\,\gamma^2 + \ldots\ldots)$. Aus $r = \frac{A^2}{n^3 - k^3.\,\text{Cos}\,\varphi}$ (§. 30.) folgt (§. 30. 54. 58.) $r = \frac{a\,(1 - \gamma^2)}{1 - \gamma.\,\text{Cos}\,\varphi}$ = (blos für elliptische Bahn) = $a\left(1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^4}{8} + \gamma\left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\text{Cos}\,\varphi + \frac{\gamma^2}{2}\,\text{Cos}\,2\varphi + \frac{\gamma^3}{4}.\,\text{Cos}\,3\varphi\ \ldots\right)$ $w = \frac{A}{r^2}$ (§. 21.) $= \frac{m\,(1 - \gamma\,\text{Cos}\,\varphi)^2}{(1 - \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = m\,(1 + 2\gamma^2 + \frac{21}{8}\,\gamma^4 - \gamma\,(2 + 3\gamma^2)\,\text{Cos}\,\varphi + \frac{\gamma^2}{4}\,(2 + 3\gamma^2)\,\text{Cos}\,2\varphi\ \ldots\ldots)$, welches approximative als wahre stündliche Bewegung des *radius vector* bei der wahren Anomalie φ angenommen werden kann, m auf jede Stunde bezogen.

III. Abschnitt.

Allgemeine Gravitation.

Erstes Kapitel.

Gründe für die allgemeine Attraktion.

§. 40. Dass beschleunigende Kraft der Sonnen-Centralkraft dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional in allen Körpern um der Sonne, höchst wahrscheinlich; durch (nach dieser Hypothese) bestimmte Kometenbahnen, Mondestheorie, Ebbe und Fluth wohl hinlänglich erwiesen.

§. 41. Ob diese Attraktion blos der Sonne oder auch andern, vielleicht allen Körpern eigen? Wahrscheinlich das in der Körperwelt, was Selbsterhaltungstrieb in der Geisterwelt; ohne sie nur Ruhe, geradlinigte Bewegungen und Ineinanderstossen der Weltkörper denkbar. Schöner Gegenstand der Philosophie und Poesie!

§. 42. Der periodischen Umlaufszeiten Quadrate wie die Kubi der mittlern Entfernungen bei Jupiters Trabanten, dann bei Saturnstrabanten wirklich wahr; wechselseitige Perturbationen der Bahnen des Jupiters und Saturns, wenn sie einander nahe genug kommen, wirklich so, wie aus der Hypothese der Attraktion nach verkehrtem Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen folgt.

§. 43. Wirkliche Bahn des Mondes aus der Centralkraft der Erde nach dem Gesetze des verkehrten Verhältnisses der Quadrate der Entfernungen sehr erklärbar, und seine Perturbationen aus der Attraktion der Sonne nach demselben Gesetze. An der Erde selbst, auch auf den höchsten Bergen, dringt sich diese mächtige Attraktion Jedermann auf. Erstreckt sie sich nicht bis auf den Mond? Was ihre Grenzen? Ist selbige nicht weit über den Mond hinaus?, so frug sich Newton.

§. 44. Bei elliptischer Bahn des Mondes (§. 26.) $g.\ P = \frac{A^2.\ a}{2b^2.\ r^2} = \frac{m^2.\ a^3.}{2r^2}$ (§. 27. 38.), oder wenn Erdradius $= \alpha$, $a = n\alpha$, $r = \alpha$, also $P = 1$, $g = \frac{m.\ n^3\alpha}{2}$, welches, wenn aus Beobachtungen bestimmte Werthe von m, n, α substituirt werden, gibt 15, 5 Rheinl. Fuss auf eine Sekunde. Umgekehrt nur $n = \sqrt[3]{\frac{2g}{m^2.\ \alpha}}$, für g, m^2, α substituirt, was Erfahrung vorschreibt, gibt $\frac{1}{n}$ oder mittlere Mondesparallaxe 57′ 16″,

was mit Beobachtungen sehr übereinstimmt. Welche Gründe für Gravitation des Mondes gegen Erde, nach dem verkehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernung! Selbst Beobachtungen unter einerlei Polhöhe an der Oberfläche der Erde und auf grossen Anhöhen, wie zu Quito, auf Pichincha, zeigen das Abnehmen der Beschleunigung nach besagtem Gesetze, mittelst der verschiedenen Länge der Sekundenpendel. Dieses Gesetz erstreckt sich also auch auf den Mond hin.

§. 45. Aus allen den von Newton entdecktes Naturgesetz der allgemeinen Gravitation aller Materie wechselseitig. Hiedurch Kepplers Planetenbewegung bedeutende Korrektur, welcher blos Centralkraft der Sonne als deren Ursache betrachtete. Newton sah darin das Resultat der wechselseitigen Gravitation aller Himmelskörper, worauf die Perturbationen gegründet. Nebst dem, Centralkraft der Sonne auf alle Theile des Planeten wirksam, und wechselseitig jene des Planeten auf die Theile der Sonne, also Nutationen.

Zweites Kapitel.

Berichtigung der Kepplerischen Theorie durch die den Massen proportionale Attraktion.

§. 46. Nicht Centralkräfte setzen unzusammenhängende Theile der Materie nicht in Bewegung, sondern die Angriffspunkte. Centralkräfte ergreifen alle Elemente, setzen also alle in Bewegung, sie mögen zusammenhängen oder nicht; z. B. Schwerkraft. Beschleunigende Kraft der Schwerkraft in allen Körpern dieselbe; aber deren bewegende Kraft der schweren Masse proportional. Bestätigt durch Newtons Pendelversuche, der, um beständig durch Luft einerlei Widerstand zu erleiden, alle Körper in derselben Kapsel schwingen liess. Bei gleichem Gewicht verschiedene Materien gleiche Schwingungszeiten Dasselbe von Centralkräften der übrigen Himmelskörper wahr. Alle Elemente aller Körper ziehen einander wechselseitig an, und alle gleich stark, bei gleichen Entfernungen. Darauf gestützte Berechnungen sehr richtige Resultate; z. B. Applattung der Erde darnach berechnet, stimmt richtig mit Erfahrung überein.

§. 47. 48. Absolute Centralkraft eines Körpers seiner Masse proportional. Daher Verhältniss zweier Massen bekannt, wenn Verhältniss ihrer absoluten Centralkräfte oder jenes ihrer ertheilten beschleunigenden Kräfte in einerlei Entfernung, oder jenes der durch sie in einerlei Entfernung bewirkten Beschleunigungen bekannt.

S, M, m absolute Centralkraft der Sonne, der Erde, eines Planeten, d. h. deren beschleunigende Kräfte in einerlei Entfernung = 1 vom Konzentrirungspunkt

der jedesmaligen Centralkraft; $\overset{\odot}{\mathfrak{M}}, \overset{♁}{\mathfrak{M}}, \overset{+}{\mathfrak{M}}$ Massen, nemlich Gewichte (auf der Oberfläche der Erde gewogen) der Sonne, Erde, des Planeten, so: $S = \frac{M \cdot \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{\overset{♁}{\mathfrak{M}}}$, $m = \frac{M \cdot \overset{+}{\mathfrak{M}}}{\overset{♁}{\mathfrak{M}}}$, beschleunigende Kräfte der Sonne und des Planeten in der Entfernung = r, $\overset{\odot}{\mathfrak{B}}, \overset{+}{\mathfrak{B}}$, so: $\overset{\odot}{\mathfrak{B}} = \frac{S}{r^2} = \frac{M . \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{r^2 . \overset{♁}{\mathfrak{M}}}$, $\overset{+}{\mathfrak{B}} = \frac{m}{r^2} = \frac{M . \overset{+}{\mathfrak{M}}}{r^2\, \overset{♁}{\mathfrak{M}}}$, also wenn Sonne und Planet in Entfernung r von einander stehen (Gewicht der Sonne gegen Planeten $\overset{\odot}{\mathfrak{G}}$, jenes des Planeten gegen Sonne $\overset{+}{\mathfrak{G}} = \frac{M . \overset{+}{m}}{r^2\, \overset{♁}{\mathfrak{M}}} \overset{\odot}{\mathfrak{M}}$, $\overset{\odot}{\mathfrak{G}} = \frac{M . \overset{\odot}{\mathfrak{M}}}{r^2\, \overset{♁}{\mathfrak{M}}} . \overset{+}{\mathfrak{M}}$, also $\overset{\odot}{\mathfrak{G}} = \overset{+}{\mathfrak{G}}$. Wirkung = Gegenwirkung.

§. 49. In Kepplerischer Theorie blos Mittelpunkt der Sonne und Planeten betrachtet. Geht aber die Attraktionslinie der Sonne und Planeten durch deren Mittelpunkt? Beantwortung hängt ab von Figuren der sich anziehenden Körper, und vom Gesetze der Dichtigkeit in jedem Körper. Hier als einfachste Hypothese angenommen in jedem Körper einerlei Dichtigkeit.

§. 50. Gewichte (auf Erdfläche gewogen) $\mathfrak{M}$, N ziehen einander frei an, so beschleunigende Kräfte von $\mathfrak{M}$ und N wie N : $\mathfrak{M}$ [N und $\mathfrak{M}$ in zwei Punkten konzentrirt.].

Um C (Taf. XI. Fig. 2.) sehr dünne physische Kugel von einerlei Dichtigkeit; physischer Punkt P nach PC gezogen mit beschleunigender Kraft = V, durch MAN, mit dV und MmnN [von dem Elemente Mm, Nn, wird P nach PC und ⊥ PC = + und — angezogen, welche letztere sich aufheben]; nach PM beschleunigende Kraft durch Mm. ϑ [ϑ = Dicke der Kugelfläche] = $\frac{\mu . M . m\, \vartheta}{PM^2}$; also noch

$$PC = \frac{\mu . Mm . \vartheta . PB}{PM^3} \text{ also } dV = \frac{\mu \cdot Mn . \vartheta . PB}{PM^3} = \ldots\ldots$$

$$\frac{\mu . 2\pi . CD . Bb . PB . \vartheta}{PM^3}$$; sey CD = a, CP = r, AB = x, Bb = dx, PM

$= \sqrt{(r - a)^2 + 2rx}$, also $dV = \frac{\vartheta \cdot \mu \cdot 2\pi a (r - a + x) dx}{((r - a)^2 + 2rx)^{\frac{3}{2}}}$; sey

$(r - a)^2 + 2rx = y^2$, so $V = \frac{\vartheta \cdot \mu \cdot \pi a}{r^2} \left(y - \left(\frac{r^2 - a^2}{y}\right) + C\right)$,

$[C = 2a]$, also für $x = 2a$, oder $y = r + a$ ist:

$V = \frac{4\pi \cdot a^2 \cdot \mu \cdot \vartheta}{r^2} = \frac{\mu}{r^2} S$ [S kubischer Gehalt der physischen Kugel-Oberfläche], als wenn in C die Masse von S koncentrirt wäre. Wäre P auch Kugelfläche von einerlei Dichtigkeit, so jeder Punkt von P, eben so jeder Punkt von AMDN, also die Centra so gegen einander gezogen, als ob beide Kugelflächen-Massen in ihren zwei Mittelpunkten konzentrirt wären.

§. 51. NAMDHBKE (Taf. XI. Fig. 3.) Kugelfläche von einerlei Dichtigkeit von grossem Radius = a und Dicke = AB = x. Masse P nach C gezogen mit beschleunigender Kraft = V; sey Bb = dx, so CP = r, so:

$dV = \frac{\mu \cdot 4\pi}{r^2} (a - x)^2 dx$ [§. 50.] also:

$V = \frac{\mu \cdot 4\pi}{3r^2} (a^3 (a - x)^3)$, für $x^3 = AC = a$ ist:

$V = \frac{\mu \cdot 4\pi}{3r^2} \cdot a^3 = \frac{\mu}{r^2} \Sigma$ [Σ Kugelinhalt], als wenn ganze Kugelmasse in C konzentrirt wäre; deren beschleunigende Kräfte $= \frac{\mu \cdot \Sigma}{r^2} \cdot S$, $\frac{\mu \cdot S \cdot \Sigma}{r^2}$.

Man nennt $\frac{2\mu \Sigma S}{r^2}$ deren *quantitas motrix*.

§. 52. Kugel A von ungleicher Dichtigkeit, doch von aussen bis ins Centrum, jede sehr dünne Kugelschale durchaus gleich dicht, eben so Kugel B; r Entfernung der Mittelpunkte, S, S′, ... Gewichte der Kugelschalen von A, so jeder Schale beschleunigende Kraft gegen Centrum von A durch S, S′, ... = $\frac{\mu \cdot S}{r^2}$, $\frac{\mu S'}{r^2}$, ... beschleunigende Kraft von B durch Kugel A = $\frac{\mu}{r^2}$ $(S + S' + S'' + \ldots) = \frac{\mu}{r^2} A$, [A Gewicht der Kugel A], wie wenn Gewicht A im Centro von A konzentrirt wäre, ..., eben so B, hier also Centra gegeneinander so ge-

zogen, als ob Gewichte A und B in den Mittelpunkten der Kugel A, B, konzentrirt lägen. *Quantitas motrix* $= 2\mu \cdot \frac{A \cdot B}{r^2}$ wie (§. 51.).

Sind also Sonne und Planeten sphärisch, und von ähnlichen Dichtigkeiten wie A, B, so Centra gegen einander gezogen, wie wenn Gewichte von Sonne und Planeten in deren Mittelpunkten konzentrirt lägen, also dieselben Bahnen, unregelmässige Dichtigkeiten mögen mit zu den nicht zu berechnenden Perturbationen beitragen.

Drittes Kapitel.

Berichtigung der Kepplerischen Theorie durch gegenseitige Attraktionen.

§. 53. mn . A (Taf. XI. Fig. 4.) = mr . B, m Schwerpunkt, so m Konzentrirungspunkt der Centralkraft, um den B und A Kegelschnitte beschreiben nach den Gesetzen vom (§. 29) wie hier bewiesen wird; z. B. A Sonne, B Planet.

§. 54. Wenn in einem System von Körpern alle Körper (blos der Trägheit gemäss) nach geraden Richtungen gleichförmig laufen, so läuft deren Schwerpunkt auch gleichförmig nach gerader Richtung (Schwerpunkt in Bezug der Gewichte dieser Körper).

§. 55. 56. Gewichte A, B, (Taf. XIII. Fig. 4.) aus A, B, aus Ruhstande blos durch wechselseitige Attraktion nach AG, BG laufend. A, B, in A, B, haben Schwerpunkt in G, in a, b, haben ihn in g; in Zeit t durchlaufen Aa, Bb. Da A . AG = B . BG oder $MG = \frac{MA \cdot A + MB \cdot B}{A + B}$ und eben so $Mg = \frac{Ma \cdot A + Mb \cdot B}{A + B}$, so $Gg = \frac{Aa \cdot A - Bb \cdot B}{A + B} = 0$, denn A . a . A = Bb . B (§. 48. gleiche Reaktion $\overset{\odot}{\mathfrak{S}} = \overset{+}{\mathfrak{S}}$), also wirket wechselseitige Attraktion zwischen A, B, (nach Gesetzen der allgemeinen Gravitation) auf Lage des Schwerpunkts G nichts. Hieraus lässt sich folgern: wenn Gewichte A, B, C, D, nach geraden Richtungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit, ohne unter einander in Attraktion zu stehen, laufen, so läuft Schwerpunkt nach gerader Richtung gleichförmig (§. 54.), nun kommen jählings A, B, C, D unter einander in Attraktionsverhältnisse, so ändern zwar A, B, C, D, ihre individuellen Bahnen in Kurven und bekommen ungleichförmige Geschwindigkeiten, aber der gemeinschaftliche Schwerpunkt ändert seine Richtung und gleichför-

mige Geschwindigkeit gar nicht. Nur fremde Kraft auf das System A, B, C, D wirkend, kann an Bewegung des Schwerpunktes ändern. Gesetz der Trägheit für diesen Schwerpunkt.

§. 57. Blos die relative Bewegung von P und S um C, (Taf. XI. Fig. 5.) oder von P um S, oder von S um P betrachtet, ist C, oder S, oder P, als fix zu nehmen. In Zeit t, P, und S durchlaufen PQ, ST, so PS, QT gerade Linie, dann

$$\left.\begin{array}{l} CS : CP \\ CT : CQ \end{array}\right\} = P : S,$$

also Kurve PQ ähnliche Kurven ST, dann P, Q gleiche Winkelgeschwindigkeit um C; π relative Lagen von P gegen S, $P\pi$ relative Bahn um S. Nun $CT = \frac{P}{S} . CQ$, ferner $\frac{P + S}{S} = \frac{PS}{CP}$, also $CP : CQ = SP : S\pi$, also $P\pi$ ähnliche Kurven mit PQ, ST; alle drei gleiche Winkelgeschwindigkeiten ähnliche Bahnen PQ, ST, $P\pi$, worinn alle analogen Linien $= CP : CS : SP = S : P : P + S$.

§. 58. $CQ : CT = S : P$, also $TQ = \frac{P + S}{S} . CQ$, oder $x = my$, also beschleunigende Kraft von P in $Q = \frac{\mu . S}{m^2 . y^2}$ oder $\frac{S}{CQ^2}$ proportional. Bahnen PQ, ST (§. 29.) also auch $P\pi$ Kegelschnitte nach Kepplerischen Gesetzen beschrieben.

§. 59. (Taf. XI. Fig. 5. 6.) S, P, Masse von Sonne und Erde, in S, P, in s, p Sonne, Erde, (Fig. 5.) beide um C beweglich (Fig. 6.), S in s fix, blos P nach pq um s laufend; SP *Apogaeum*, sp *Apogaeum*, $P\pi$ und pq gleiche und ähnliche Ellipsen von grosser Axe A, daher, wenn $\pi SP = qsp$, $S\pi : sq = SP : sp$ und $SP = sp$, [ω, v Tangentialgeschwindigkeit in P, p] T, Θ periodische Umlaufszeiten in $P\pi$ und pq [τ, θ unendlich kleine Zeiten, binnen welchen beschrieben $P\pi$, pq] V beschleunigende Kraft von S in Entfernung $SP = sp$ [$PR = u . \tau$, $RQ = g . V . \tau^2$, $pr = \ldots$, also $v = u \sqrt{\frac{SP}{CP}} = u \sqrt{\frac{S + P}{S}}$. Ferner $T : \Theta = \tau : \theta$ (§. 20.) also $\Theta : T = \sqrt{S + P} : \sqrt{S}$]. Sollte P um fixes S Ellipse von grosser Axe a in periodischer Umlaufszeit t beschreiben, so (§. 28.)

$t = \Theta \sqrt{\frac{a^3}{A^3}} = T \sqrt{\frac{(S+P)\,a^3}{S\,.\,A^3}}$, sollte $t = T$ seyn, so müsste

$A : a = \sqrt[3]{S+P} : \sqrt[3]{S}$.

§. 60. Im Sonnensystem Sonne, Planeten, Kometen, Monde, einen ruhig stehenden oder gerade fort gleichförmigen laufenden Schwerpunkt; nur durch äussere Einwirkung dieser Schwerpunkt nach krummen Linien ungleichförmig. Das Kopernikanische System setzt Sonne fix. Dieses blos approximative wahr, da Sonne und alle Körper des Sonnensystems um besagten Schwerpunkt ähnliche Ellipsen beschreiben. Approximative, darum, weil wegen grosser Masse der Sonne besagter Schwerpunkt nicht weit vom Sonnencentro fällt, also Sonnenbewegung unbeträchtlich ist. Kepplerische Sätze durch Gesetz der gegenseitigen Gravitation nicht umgestossen.

§. 61. Nur drittes Kepplerische Gesetz kleine Abänderung durch gegenseitige Gravitation. Alle Rechnungsresultate sind richtig, wenn man Sonne als fix, sie aber von der Masse $S + P$ annimmt; S und P Massen der Sonne und des Planeten den man betrachtet. Sey [P p Massen zweier Planeten] A, a deren mittlere Entfernung von Sonne [m, n ihre mittlere Bewegung], so (§. 38.) $m^2 A^3 : n^2 a^3 = S + P : S + p$, oder S als Einheit genommen $= 1 + P : 1 + p$.

Viertes Kapitel.

Masse und Dichtigkeit der Körper unsers Sonnensystems.

§. 62. 63. [$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, beschleunigende Kräfte zweier Centralkräfte in Entfernung $= 1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$, Entfernungen R, r] $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} = R^2 : 1$, $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{R^2}$ und $\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}}{r^2}$, ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}$, so $\mathfrak{A} : \mathfrak{a} = R^2 : r^2$. Um Masse M sey die Entfernung F beschleunigende Kraft wie auf Erdoberfläche. Körper beschreibe um M Ellipse in Zeit T, in jeder Sekunde im Durchschnitt Bogen $= \mu$, so (§. 27.) $F^2 = \frac{2A^3 . \pi^2}{g . \tau^2} = \frac{A^3 . \mu^2}{2g}$ absolute Erdcentralkraft und Erdmasse $= 1$, Erdhalbmesser $= \alpha$, so $M = \frac{2A^3 . \pi^2}{g . \alpha^2 . \tau} = \frac{A^3 . \mu^2}{2g . \alpha^2}$, $M : M' = \frac{A^3}{\tau^2} : \frac{A'^3}{\tau'^2} = A^3 . \mu^2 : A'^3 . \mu'^2$. Sey r Halbmesser der Trabantenbahn, ρ scheinbarer Dnrchmesser des Hauptplaneten in der mittlern Ent-

fernung der Erde von der Sonne, $\frac{r}{\varrho} = n$, so Masse des Hauptplaneten $M = \lambda . \mu^2 . n^3 . \varrho^3$, alle Bögen in Halbmesser der Erdbahn; λ Konstante, Erdmasse = 1.

§. 64. $M : m = \frac{A^3}{a^3} : \frac{T^2}{t^2}$; setze (§. 61.) M = ⊙ + ♁, m = ♁ + ☾, oder da ☾ = $\frac{1}{72}$ ♁, m = $\frac{73}{72}$ ♁ = μ ♁, ... so ⊙ = 376360, die Erdmasse = 1 genommen.

§. 65. R . ϱ, wirklicher, und in Erdbahn-Halbmesser-Entfernung scheinbarer Halbmesser eines Planeten, ω Sonnenparallaxe, $R = \frac{\varrho}{\omega}$ Verhältniss der Dichtigkeiten zweier Planeten, daher und nach (§. 63.), $\Delta : \Delta' = \mu^2 . n^3 : \mu'^2 . n'^3$, also blos abhängig von den Argumenten der Bewegungen der Trabanten um die Planeten.

§. 66. 67. G Beschleunigung in Entfernung R auf Weltkörper,

$R = \frac{\varrho}{\omega}$, $G = \frac{gM}{\mathfrak{M} R^2} = \frac{gM}{\mathfrak{M}} \frac{\omega^2}{\varrho^2} = \frac{2}{5\mathfrak{D}} . \frac{g . \varrho . \Delta}{\omega}$; $\mathfrak{M}$, M Massen von Erde und Weltkörper, $\mathfrak{D}$ Erddichte.

§. 68. Die Masse, Dichte, ... des Mondes für sich bestimmt *Bernoully* aus dem Verhältnisse der Wirkung auf Ebbe und Fluth durch Sonne und Mond; stärkste Wirkung in Syzygien, kleinste in Quadraturen. Im Monde G = 2,8995 Fuss.

§. 69. Da ♂ ♀ ☿ keine Trabanten haben, so lässt sich nach obigem deren Masse, Dichte, ... nicht bestimmen. Dabei blos Schlüsse noch Analogie. Ist Sonnenparallaxe = 8", 5, so:

	Masse	Volumen	Densität	G in Rhein. Fussen
☉	365361	144515 2	0,25282	446,823
♂	18,135	8[illegible],0	0,21599	14,694
♄	108,79	1032,0	0,10540	16,652
♃	342,357	1327,0	0,25796	44,315
⛢	0,095544	0,14558	0,6563	5,397
♁	1,00000	1,00000	1,0000	15,632
♀	1,2749	0,92217	1,3825	21,036
☿	0,17273	0,06687	2,5833	16,391
☾	0,01377	0,020223	0,68080	2,9000

IV. Abschnitt.

Umwälzung der Weltkörper.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Rotation.

§. 70. 71. Progressive und rotatorische Bewegung. Wie viel immer Kräfte durch den Schwerpunkt einer festen Masse, ertheilen nur progressive nie rotatorische Bewegung.

§. 72. Gehen Kräfte nicht durch Schwerpunkt der Masse, so rotatorische Bewegung. Feste und freie Axe.

§. 73. C Druckgrösse der Centrifugalkraft des Elements d M (um r von Axe entfernt) binnen dt, γ Winkelgeschwindigkeit und c eigene Geschwindigkeit von dM binnen dt, so $C = \frac{c^2\, dM}{2gr} = \frac{\gamma^2 r\, dM}{2g}$, Beschleunigung g. $\frac{C}{dM} = \frac{c^2}{2r} = \frac{\gamma^2 r}{2}$

§. 74. AB (Taf. XI. Fig. 7.) physische Linie deren Massen = M, der Schwerpunkt in G, dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit γ um C, so Summe aller Centrifugalkräfte nach CB *minus* jener nach CA = $\frac{\gamma^2}{2g}$. CG. M, also = o, wenn C in G ist; dann braucht der Drehpunkt keine Unterstützung und hat keine beschleunigende, fortschreitende Bewegung.

G Schwerpunkt von $\alpha\beta\delta\mu\alpha$ (Taf. XI. Fig. 8.) [M' Gewicht von $\alpha\beta\delta\mu\alpha$] Rotation um C' mit Winkelgeschwindigkeit = γ, so Druck nach C' C'' = $\frac{\gamma^2}{2g}$. CG. M', und nach C' C = $\frac{\gamma^2}{2g}$. C' C. M', also um und um kein Druck auf C', wenn C' in G.

§. 75. Bei Rotation eines Körpers um Axe bestimmt man deren fortschreitende rotatorische Bewegung, wenn man den Körper in auf Axe senkrechte Ebenen theilt, und jeder Ebene Druck auf ihren Durchschnittspunkt mit Axe bestimmt.

§. 76. AX (Taf. XI. Fig. 9.) = x, Gewicht des Körpers acdebc = M, um AX Rotation mit Winkelgeschwindigkeit γ. Denke durch AX zwei auf einander senkrechte Ebenen AB und A'B', Abstände des Schwerpunkts der Schichte dM von Ebene AB und Ebene A'B' = y und z. Axe AX keine auf sich senkrechte fortschreitende Beschleunigung, wenn $\int y dM = o$ und $\int z dM = o$ ist. Axe AX keine Rotation um einen Punkt A, wenn $\int xy dM = o$ und $\int xz dM = o$ ist. $\int y dM = o$ und $\int z dM = o$ bestimmen AX durch Schwerpunkt G von M, und $\int xy dM$, $\int xz dM$ bestimme Länge von AX. Die 3 senkrechten Koordinaten x, y, z bestimmen Lage des Schwerpunkts von dM gegen AX. Nun kömmt Axendruck blos durch Rotationskräfte bewirkt.

§. 77. Körperrotation durch Kräfte: entweder um gegebene Axe, welche sich d Kräfte selbst bestimmen, bei nirgends unterstütztem Körper. Bei gegebener Axe jede Kraft in 3 aufzulösen, parallel mit Axe, senkrecht auf Axe, senkrecht auf beide vorhergehenden, nur letztere bewirkt Rotation um Axe und wird ganz darauf verwandt. Alles in einerlei Ebene. Element P mit Axe $\alpha\ \beta$ (Taf. XI. Fig. 10.) in unbiegsamen Zusammenhange; Kraft PQ = V in P oder C angebracht, nach Pg wirkend, bewirkt einerlei Druck auf $\alpha\beta$. Ist daher $\alpha\beta$ in β, A, B unterstützt, und soll $\alpha\beta$ in Ruhe seyn, so müssen die Unterlagen β, A, B, so stark entgegen drü-

cken: V. Cos η, $\frac{BQ'. \text{Cos}\,\eta}{AB}$ V, $\frac{AP'. \text{Cos}\,\eta}{AB}$ V. Ist P Q ‡ zu $\alpha\beta$, so Cos η = 1, BQ' = AP' = αP.

§. 78. Sind Kräfte P, Q, R (Taf. XI. Fig. 12.) in einerlei Ebene um auf Ebene senkrechte Axe C im Gleichgewichte, so Druck auf Axe C ganz derselbe, als ob diese Kräfte unmittelbar an Axe in ihrer parallelen Lage angebracht wären. Sind um Axe AB Kräfte in mehreren auf AB senkrechten Ebenen liegend, im Gleichgewichte, so Druck auf jeden Punkt von AB eben so gefunden.

Um Druck auf Axe zu finden, wenn P, Q, R, nicht im Gleichgewicht, also um C beschleunigte Rotation, fingire Kräfte die alles ins Gleichgewicht setzen, aber auf C keinen Druck ausüben.

§. 79. DCE (Taf. XII. Fig. 4.) senkrechte Ebene auf Axe AB, darinn alle zur Rotation um AB bestimmenden Kräfte auf Vv reduzirt; bei dieser beschleunigten Rotation wie stark Druck auf Axe AB in C? dφ binnen dt durchlaufener Bogen blos durch Vv = V, fingire jedes Element Y durch Kraft P nach YZ bestimmt, so dass es frei für sich binnen dt blos durch P beschriebe dφ, (dφ, *pro radio* = 1 um C), so Gleichgewicht um C, und auf Axe AB keine Druckvermehrung durch Kräfte P. Suche nun Druck auf Axe durch V um die Kräfte P [CY = 1, G der Ebene Schwerpunkt, CX = x, XY = y; Masse von Y = dM, r dφ = $\frac{gP}{dM}$ dt², P = $\frac{d\varphi}{g dt^2}$ r dM, daher $\frac{d\varphi}{g dt^2} \int rr\,dM = f.V$ (CV = f). Alle Elementarkräfte P nach YX und Yz aufgelöst, Schwerpunkt jener nach Yz in E, jener nach XY in F, so gleichgeltend mit dem Falle, wo blos in E und F nach Ee, und Ff wirkten Drucke $\frac{Vf}{\int rr\,dM} \int y\,dM = E$ und $\frac{V.f}{\int rr\,dM} \int x\,dM = F$, woselbst $CE = \frac{\int yy\,dM}{\int y\,dM}$, $CF = \frac{\int xx\,dM}{\int x\,dM}$.

§. 80. Ist also Cγ = V, Cδ = E, Eε = F, so bestimmen Cγ, Cδ, Cε den Druck auf Axe (§. 78.). Läuft CD durch G, so $\int y\,dM = 0$, also E = 0; läuft EC durch G, so $\int x\,dM = 0$, also F = 0, ist also C in G, so E und F = 0, also dann Ebene CDE nebst Rotation nach progressiver Beschleunigung durch V nach Cγ. Nur dann C freie Axe; wenn V = Cη = $\sqrt{E^2 + F^2}$, also (wenn g Schwerpunkt der Fläche CDE) $f = \frac{\int rr\,dM}{M.Cg}$, ferner wenn δCη = DCγ, also tang DCV =

DCg, d. h. CV in der Cg liegt. Dann $\frac{V}{M} = \frac{Cg.d\varphi}{g.dt^2}$ beschleunigende Kraft in g, im Punkte g also $dv = 2g\ dt.\frac{V}{M} = \frac{2.Cg.d\varphi}{dt}$.

§. 81. Auf ähnliche Art bei um AB (Taf. XII. Fig. 6.) rotirendem Körper, 3 senkrechte Koordinaten: $AX = x$, $RY = y$, $YZ = z$, dann $XZ = r$, Elementargewicht $Z = dM$; Elementarkräfte p der dM auf r senkrecht fingirt, in Gleichgewicht mit Kräften V, die p nach parallelen Richtungen mit y und z zerlegt in q und u, $q = \frac{p.z}{r}$, $\frac{p.y}{r}$. Bestimmung des Körpers zu gleichzeitiger Rotation um 3 aufeinander senkrechte Axen durch die q und die u. Jetzt $Sq = Q$, $Su = R$. Konzentriren sich alle q in Q, alle u in R, so $Q = \frac{V.f\int zdM}{I}$, $AE = \frac{\int xz\,dM}{\int zdM}$, $EQ = \frac{\int zz\,dM}{\int zdM}$, $R = \frac{V.f}{I}\int ydM$, $AF = \frac{\int xy\,dM}{\int ydM}$, $FR = \frac{\int yy\,dM}{\int ydM}$ $[I = \int rr\,dM]$. Drucke auf die Punkte der Axe AB dieselben als ob in E nach $Ee = Q$, in F nach $Ff = R$, und in den übrigen Punkten von AB die Kräfte V zu sich selbst parallel unmittelbar (statt in der auf AB senkrechten Ebene) angebracht wären. Läuft AB durch Körpers Schwerpunkt, so $\int zdM = o$, $\int ydM = o$, also $Q = o$, $R = o$; Summe aller Momente der $V = f.V$.

§. 82. Wird der Körper um AB durch was immer für Kräfte beschleunigt, so lässt sich jede solche Kraft in eine mit Axe AB parallele X und in eine auf AB senkrechter Ebene liegende V zersetzen; die Drucke durch alle V auf die Punkte von AB suche (§. 81.), jene auf zwei Punkte A und B von AB durch alle X, und jenen nach der Länge von AB durch alle X suche (§. 77.). Alle auf AB senkrechte Drucke sind leicht auf A und B reduzirt.

§. 83. (Alles blos auf dt bemessen). Kömmt noch Axendruck durch Schwungkräfte der Elemente dM in Rechnung, ist ω Winkelgeschwindigkeit, V allgemein jede auf um AB rotirenden Körper wirkende äussere Kraft, welche mit auf AB senkrechte Ebene, (welche AB in U schneidet) parallel und senkrecht zersetzt $= W$ und $= U$ gibt, die Summe aller statischen Momente der $W = f:V$, so folgende Drucke auf Axe AB. I. nach AB oder BA Summe aller U; II. In A: 1) $AM = \frac{a-u}{a}W$ $[AU = u]$, welche alle zusammen $= AM'$ geben; 2) (da alle Schwungkräfte mit y

und z parallel zersetzt geben $\frac{\vartheta\vartheta}{2g} \int y\,dM$ und $-\frac{\vartheta\vartheta}{2g} \int z\,dM$, die sich auf AB senkrechten Ebenen konzentriren von A entfernt um $\frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM}$ und $\frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}$,

$A\,a = \left[\frac{f.V}{\int rr\,dM} = k\right] = k \int z\,dM - \frac{k}{a} \int xz\,dM + \frac{\vartheta\vartheta}{2g} \int y\,dM - \frac{\vartheta\vartheta}{2ag} \int xy\,dM$; 3) $A\alpha = k \int y\,dM - \frac{k}{a} \int xy\,dM + \frac{\vartheta\vartheta}{2g} \int z\,dM - \frac{\vartheta\vartheta}{2ag} \int xz\,dM$; 4) durch jedes U auf AB senkrecht in $A = \frac{b}{a}$ U [b Entfernung von AB, in welcher U angebracht], III. In B: 1) BN; welche zusammen = BN′; 2) B b; 3) B β; 4) alle $\frac{b}{a}$. U (die den $\frac{b}{a}$ U in A entgegen gesetzt sind) auf ähnliche Art ausgedrückt als in A.

§. 84. Hier können nur Kräfte W, W′, ... deren statische Momente um AB = wW, w′W′, ... seyen, um AB Rotation bewirken. Sey Ww + W′w′ + ... = f. V. Winkelgeschwindigkeit zu Ende t = ϑ, so f. dϑ = 2g dt. V:$\left(\frac{\int rr\,dM}{ff}\right)$ oder $d\vartheta = \frac{2g.\,dt.\,V.\,f}{\int rr\,dM}$, sey φ binnen dt beschriebener Bogen *pro radio* = 1, so $\vartheta\vartheta\, d\vartheta = \frac{d\varphi}{dt}\, d\vartheta = \frac{d\varphi}{dt} \frac{2g\,dt.\,Vf}{\int rr\,dM}$.

Zweites Kapitel.

Rotation um eine freie Axe.

§. 85. Axe AB freie Axe heisst: erleidet keinen Druck durch Centrifugalkräfte der um AB mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit laufenden dM, wenn sie auch Drucke durch äussere Kräfte V, W, U erleidet. Daher bleibt AB in allen Fällen freie Axe, wenn sie Bedingnisse (§. 76.) erfüllt. Wird X vom Schwerpunkte an gezählt, so überdiess $\int x\,dM = 0$.

§. 86. Bekannte Gleichung zwischen AX = X (Taf. XI. Fig. 11.), XY = Y, YZ = Z, woraus bekannt $\int XX\,dM = A$, $\int YY\,dM = B$. $\int ZZ\,dM - C$, $\int XY\,dM - D$, $\int XZ\,dM - E$, $\int YZ\,dM = F$ gegen Axe AB durch Schwerpunkt A. Lege durch Axe AF Ebene senkrecht auf ABYC, drücke AX′ = X′, X′Y′ = Y′, durch X, Y, und hieraus Ax = x, xy = y, yZ = z durch X, Y, Z, und hieraus

$\frac{\int xydM}{Cos\ 2\theta} = \ldots\ldots$ und $\frac{\int xzdM}{Cos\ \theta} = \ldots\ldots$, welches Ausdrücke = o, wenn AF freie Axe; [tang η = t]; aus diesen 2 Gleichungen tang $2\theta = \ldots\ldots$ tang $2\theta = \ldots\ldots$, woraus gleich Null gesetzte Gleichung fünften Grades für t, durch $1 + t^2$ dividirt, dritten Grades, t eine oder 3 mögliche Werthe, also auch tang $\theta = \frac{(A - B)\ Sin\ 2\eta - 2\ D\ Cos\ 2\eta}{2\ (F\ Cos\ \eta - E\ Sin\ \eta)}$, also eine oder 3 mögliche freie Axen [nie 45° nie 90° das θ vorausgesetzt].

§. 87. Sind AB und AF freie Axen, so D = o, E = o. $\int xydM = o$, $\int xzdM = o$, also F. Sin $\eta - \frac{1}{2}$ tang 2θ (A Cos $^2\eta$ + B Sin $^2\eta$ — C) = o und (F *tang* θ — (A — B) Sin η) Cos η = o, woraus $\eta = 90°$ und tang $2\theta = \frac{2F}{B - C}$, daher θ = EAF und = EAF + 90°, also schneiden sich im Schwerpunkte wenigstens 3 auf einander senkrechte freie Axen.

§. 88. AB, AC, AD, diese 3 Axen, AB Axe der X, AC der Y, AD der Z, Trägheitsmoment um AB, AC, AD = B + C, A + C, A + B; D = o, E = o, F = o. Um Axe AF Trägheitsmoment Mkk = A (Sin $^2\eta$ + Cos $^2\eta$ Sin $^2\theta$) + B (Cos $^2\eta$ + Sin $^2\eta$. Sin $^2\theta$) + C Cos $^2\theta$, in Bezug auf η und θ *max.* und *min.* wenn AF in zwei Lagen unter jener AB, AC, AD fällt; AB, BC, AD Hauptaxen; suche Axen durch A deren Trägheitsmoment *max.* und *min.* darauf in A Senkrechte gesetzt, so die 3 Hauptaxen gefunden.

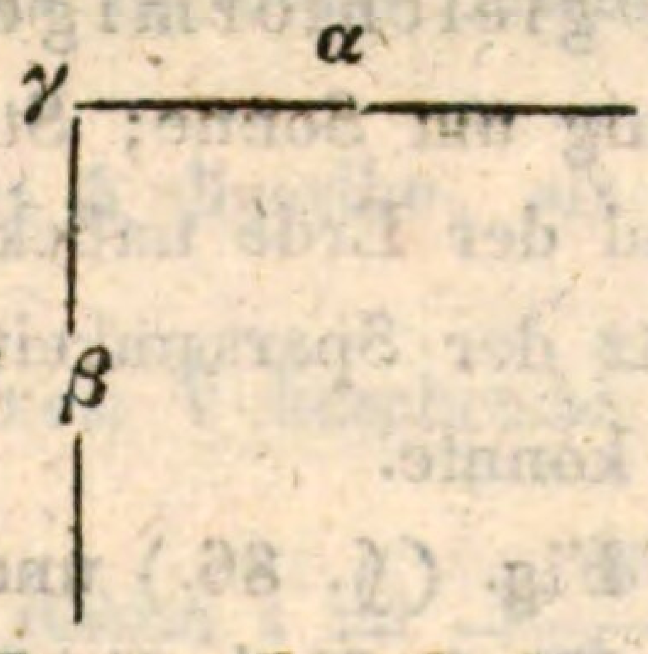
§. 89. Allgemein jeder Körper nur 3 freie Axen, nemlich die 3 Hauptaxen. Ausnahme davon: wenn B = C, so jede in Ebene CAD durch A laufende Axe frei, ausser für θ = 45° und 90°; ferner wenn B = C = A, so alle durch A laufenden Axen frei; ausser die θ = 45° und 90° entsprechen. Ist Trägheitsmoment um jede durch A laufende Axe AF beständige Grösse, so jede Axe AF freie Axe.

§. 90. Entstehe Körper durch Rotation von CAMBC (Taf. XI. Fig. 13.) um CA, CX = x, XY = y, YZ = z, XZ = r, ZXY = φ, z = dM = dr. dx. rdφ (Gewicht kubischer Einheit = 1), so A = $\int$xx. rdx. dr. dφ, B = $\int r^3$. Cos φ dx × dr. dφ, C = $\int r^3$. Sin$^2\varphi$. dx. dr. dφ, D = $\int$x. rr. Cos φ. dx. dr. dφ, E = $\int$x. rr × Sin φ dx. dr. dφ, F = $\int r^3$ Sin φ. Cos φ. dx. dr. dφ, $\int$xdM = $\int$x. r. dx. dr. dφ, $\int$ydM = $\int$rr. Cos φ. dx. dr. dφ, $\int$zdM = $\int$rr. Sin φ. dx. dr. dφ, woselbst zu integriren in Bezug auf r, das Erhaltene in Bezug auf x, die Konstanten so zu bestimmen, dass jegliches Integrale = o sey für φ = o, r = o, und x = a,

und zu substituiren $\varphi = 2\pi$, $r = XM = u = f(x)$. Hieraus folgt $\int y dM = o$, $\int z dM = o$, daher Schwerpunkt in AC [$D = o$, $E = o$, $F = o$, daher AC freie Axe] $B = C$, daher alle durch Schwerpunkt auf AC senkrechte freie Axen. $\int x dM = \pi \int f(x)^2 dx = \pi (F(x) - F(a))$, $A = \pi \int f(x)^2 x^2 dx = \pi (f'(x) - f'(a))$, $B = C = \frac{\pi}{4} \int f(x)^4 dx = \frac{\pi}{4} (f^+(x) - f^+(a))$; wird x vom Schwerpunkt gezählt, so x positiv und a negativ, $x + a$ die Länge der Axe des ganzen Körpertheils, dann x genannt X und $a = C\mathfrak{C}$, dann $\int x dM = o$, also $F(x) = F(a)$ $F(X) = F(C\mathfrak{C})$.

§. 91. Dreht sich Ellipse von grosser und kleiner Halbaxe a, b, um kleine Axe 2b, so entsteht an Polen gedrücktes Sphäroid, wobei $A = \frac{4}{15} \pi a^2 b^3$, $B = C = \frac{4}{15} \pi a^4 b = \frac{a^2}{b^2} A$, Trägheitsmoment um $2b = B + C = \frac{8}{15} \cdot \pi a^4 b$, um jede Aequatordurchmesser $2a = A + C = A + B = \frac{4}{15} \pi . a^2 . b (a^2 + b^2)$. Diese Trägheitsmomente auch $= \frac{2}{5} Ma^2$ und $\frac{M}{5} (a^2 + b^2)$ da $M = \frac{4}{3} \pi a^2 b$. Bei Kugel $a = b$, also diese Trägheitsmomente $= \frac{2}{5} M . b^2 = \frac{8}{15} . \pi . b^5$; M Gewicht des Sphäroids.

§. 92. Wirken auf einen freischwebenden Körper, bei welchem keine Axe in ihren Endpunkten gehalten wird, wie viel immer Kräfte nach den verschiedensten Richtungen. Man zersetze alle diese Kräfte nach den sich senkrecht schneidenden Richtungen α, β, γ, und denke sich im Körper



mit α, β, γ, parallel laufende Axen α', β', γ', so dreht sich der Körper beständig um α', wenn α' eine freie Axe ist, sowohl in Bezug der **Schwungkräfte** der um α' laufenden Elemente, als der **Kräfte** nach β und γ, eben so dreht sich der Körper beständig um β' wenn ; daraus folgen die Bedingungen des

gleichzeitigen beständigen Drehens um α', β', γ'. Es kann aber α' nur dann in aller Rücksicht freie Axe seyn, wenn α' Hauptaxe ist, und zugleich alle Drucke auf α' blos durch Kräfte β und γ sich aufheben; eben so kann β' Beständige Rotation um α', β', γ', setzt also voraus α', β', γ', als Hauptaxen, und nebstbei noch

§. 93. Wenn beliebige Kräfte $K, \overset{+}{K}, \overset{++}{K}$, ... nach beliebigen Richtungen in beliebigen Punkten eines Körpers angebracht sind, so ist die fortschreitende Bewegung dessen Schwerpunkts dieselbe, als ob $K, \overset{+}{K}, \overset{++}{K}$, ... in ihren Richtungen im Schwerpunkt unmittelbar angebracht wären. Denn AB, AC, AD unverrückbare auf einander senkrechte Axen der x, der y, der z, wie sich auch der Körper bewege. Anfangspunkt der x unverrückbar; zu Ende t Lage eines angenommenen dM bestimmt durch x, y, z, des Schwerpunkts durch e, f, h, $e = \frac{\mathfrak{S}x\,dM}{M}$, $f = \frac{\mathfrak{S}y\,dM}{M}$, $h = \frac{\mathfrak{S}z\,dM}{M}$, $de = \frac{\mathfrak{S}dx\,dM}{M}$, ... ;

Nach AB, AC, AD jedes dM ergriffen durch p, q, r, so $ddx = \frac{2gp}{dM}dt^2$. . . ;

$dx\,dM = 2gdt \int pdt$; $\mathfrak{S}dxdM = 2gdt \int P.dt$, ...

Hieraus $ddh = \frac{2g.R}{M}dt^2$. Diese fortschreitende Bewegung gar keine Funktion der Rotationen $K, \overset{+}{K}, \overset{++}{K}$, ... bewirken immer Rotationen um Schwerpunkt.

Drittes Kapitel.

Freie Rotation der Weltkörper.

§. 94. Erde, gleichförmige Bewegung um beständige Axe, zugleich elliptische ungleichförmig um Sonne; Störungen durch äussere Kräfte; Ursprüngliche Bewegung und Zustand der Erde unbekannt; hier untersuchen Beschaffenheit des Stosses V, der (nach Gesetz der Sparsamkeit) allein angewandt der Erde ihre doppelte Bewegung beibringen konnte.

§. 95. (*Vide* Fig. (§. 86.) und folgende dieselbe, blos auf EAF projizirt ist). VR Richtung der Kraft V $\perp$ EABE; V bewirke um AF freie Rotation also AF Hauptaxe. A Schwerpunkt AR = h, RE = h. Sin η, AE = h. Cos η, EF = h $\times$ Cos η. *tang* θ, AF = k = h Cos η Sec. θ. Nehme Angriffspunkt von V in V, so

so dass VF $\perp$ AEFA. Lege durch V Ebene parallel zu AFEA, und zerlege darin V nach Vv = V. Cos θ und Vu = V. Sin θ auf AF senkrecht und mit AF parallel. Lege durch FA und V Ebene 𝔈, nenne FAEF Ebene 𝔈′, so bestehen in A und F folgende auf AF senkrechte Drucke nebst dem Drucke V. Sin θ nach FA (durch V Sin θ) (§. 77.) V tang η Sin θ. Cos θ und V tang η Sin θ Cos θ in 𝔈; (durch V Cos θ) (§. 79. §. 83.) o und V Cos θ in 𝔈′ (durch die fingirten Elementarkräfte), da das in (§. 79) genannte f. V hier = V Cos θ. h Sin η, also $\frac{fV}{kg}$ = tang η Cos² θ $\frac{V}{I}$ $\int$xdM = o, $\int$ydM = o, $\int$zdM = o ist, Aβ = $\frac{V}{I}$ tang η Cos² θ $\int$xzdM und Fe = $\frac{V}{I}$ tang η Cos² θ $\int$xzdM in 𝔈′, dann Aa = $\frac{V}{I}$ tang η Cos² θ $\int$xydM und Ff = $\frac{V}{I}$ tang Cos² θ $\int$xydM in 𝔈, Aβ und Fe einander entgegen gesetzt, eben so Aa und Ff.

§. 96. Alle durch A laufenden Drucke bewirken blos fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes. Soll demnach AF (Taf. XII. Fig. 7.) um keinen ihrer Punkte rotiren, so muss seyn V. Cos θ + $\frac{V}{I}$ tang η. Cos² θ $\int$xzdM = o, und V tang η. Sin θ + $\frac{V}{I}$ tang η Cos² θ $\int$xydM = o, also (da $\int$xzdM = o und $\int$xydM = o) θ = o, η = 90°. Also Rotation des freischwebenden Körpers beständig um AF nur möglich, wenn 1) AF Hauptaxe, 2) AF so liegt, dass θ = o, η = 90°; umgekehrt: hat AF diese zwei Eigenschaften, so muss V den freischwebenden Körper beständig um AF drehen. Ist V beständig, so binnen dt durchlaufener Bogen *pro radio* = 1 um AF blos durch V = dφ = $\frac{g.\ h.\ V}{I}$ dt², also in erster Sekunde beschriebener Bogen V = $\frac{g.\ h.\ V}{I}$. Progressive Bewegung von A dieselbe, als ob V mit VR parallel in A zöge (§. 93.), also binnen dt blos durch V beschreibt A = $\frac{g\,V}{M}$ dt², daher in der ersten Sekunde von A durchlaufener Raum s = $\frac{g.\ V}{M}$.

§. 97. Hat sich Erde vom ersten Anfange des Stosses an beständig um jetzige Axe gedreht, und hat dieser Stoss zugleich Tangentialgeschwindigkeit in Ebene der Ekliptik ertheilt, so lag Stoss in Aequatorsebene mit Aequinoktiallinie parallel auf Solstitiallinie senkrecht. Lag dieser Stoss senkrecht auf *radius vector* der Erdbahn, so im Anfange des Stosses Absidenlinie in Solstitiallinie. Hieraus und aus jährlicher Bewegung der Absidenlinie folgte Epoche dieses Stosses wenigstens vor 10410 Jahren. Doch alles diess blosse Hypothese.

§. 98. Planetenbahnen kreisförmig vom Radius a, und darin gleichförmige Bewegung angenommen. Winkelgeschwindigkeit in Bahn = c, der Rotation = γ; Dauer = t des Stosses V in kugelförmigen Planeten an Gewicht = M vom Radius = α; also $\gamma = \frac{2g.\ h.\ V}{I}.\ t$, a. c $= \frac{2g.\ V}{M}.\ t$. Dauer des periodischen Umlaufs und einer Rotation = T, τ, so T : τ = γ : c, also da (§. 91.) $I = \frac{2}{5} M\alpha\alpha, \frac{h}{\alpha} = \frac{2}{5}.\ \frac{T}{\tau}.\ \frac{\alpha}{a}$. Hier $\frac{\alpha}{a}$ heliocentrischer Halbmesser . . . , oder Sonnen - Horizontal - Parallaxe. Beschleunigende Kraft $\frac{V}{M} = \frac{a.\ c}{2g.\ t}$. Ist a in Erdbahnhalbmessern, Erdradius α, z. B. in Fussen, Sonnen-Horizontal-Parallaxe von Erde = ω in Fussen, so Planetenbahnhalbmesser = a. $\frac{\alpha}{\omega}$ in Fussmaass ausgedrückt. g' Fallraum auf Erde in Zeit 2t als Zeiteinheit angenommen = 2t, so $\frac{V}{M} = a.\ \frac{c}{\omega},\ \frac{\alpha}{g}$, (a in Erdhalbmesser, c, ω Zahlen, α, g', z. B. in Fussmaass.)

§. 99. 100. 101. Seyen Ebene der Ekliptik und des Aequators eines Planeten in einerlei Ebene; S, T, Mittelpunkte (Taf. XII. Fig. 8.) von Sonne und Planeten, B Stosspunkt, TB = h. Habe unendlich grosser Stoss binnen unendlich kleiner Zeit t' Umwälzung und Rotation bewirkt, durch T und S unbiegsame mathematische Ebene gedacht, binnen t' Punkt c stille, CT = x, so (c, v Winkelgeschwindigkeit in Bahn und Rotation, ST = a) $x = \frac{a.\ c}{c + \gamma} = \frac{a\,c}{\gamma}$, also $\frac{x}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}.\ \frac{c}{\gamma} = \frac{2}{5}\ \frac{\alpha}{h},\ \frac{2}{5}\alpha\alpha =$

$\frac{SrrdM}{M}$, also $x = \frac{SrrdM}{Mh}$, also $BC = x + h = \frac{SrrdM + Mhh}{Mh}$. Es heisst C der Mittelpunkt der freien Rotation, B, C, eben so C, B gegen einander *centra oscillationis*. —

Viertes Kapitel.

Störung der Rotation durch äussere Kräfte.

§. 102. Nach (§. 52.) allgemeine Gravitation und kleine Abweichung der Himmelskörper von sphärischer Gestalt keine merkliche Störung in Planetenbahn; dadurch aber Rotation merklich gestört. Diese Störung nur bei Mond und Erde vollkommen bekannt.

§. 103. (Fig. §. 86.) AF Rotationsaxe zu Ende t durch Schwerpunkt A, AX = X, ... Ax = x, ... Geschwindigkeit zu Ende t von z nach Z ζ = e blos durch Rotation (also Winkelgeschwindigkeit = $\frac{e}{r} = \varepsilon$), e nach AB, AC, AD zersetzt gibt:

$$u = \varepsilon\ (Z.\ \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\theta - Y.\ \mathrm{Sin}\,\theta)$$
$$v = \varepsilon\ (X.\ \mathrm{Sin}\,\theta.\ Z.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\theta)$$
$$w = \varepsilon\ (Y.\ \mathrm{Cos}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\theta - X.\ \mathrm{Sin}\,\eta.\ \mathrm{Cos}\,\theta),$$

aber wenn $BAF = \alpha$, $CAF = \beta$, $DAF = \gamma$ ist,

$$u = \varepsilon\ (Z.\ \mathrm{Cos}\,\beta - Y.\ \mathrm{Cos}\,\gamma)$$
$$v = \varepsilon\ (X.\ \mathrm{Cos}\,\gamma - Z.\ \mathrm{Cos}\,\alpha)$$
$$w = \varepsilon\ (Y.\ \mathrm{Cos}\,\alpha - X.\ \mathrm{Cos}\,\beta)$$

Es ist $\mathrm{Cos}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\beta + \mathrm{Cos}^2\gamma = 1$.

§. 104. Bleibe binnen dt Drehaxe AT unverändert oder ändre ihre Lage um $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, so folgendes richtig (AB, AC, AD gegen Fixsterne B, C, D gezogen). Aeussere Kräfte nach AB, AC, AD zersetzt, geben statische Momente um AB, AC, AD = P, Q, R, wodurch binnen dt Rotationen um AB, AC, AD gestört werden. Sollen dieselben Störungen um AB, AC, AD durch Elementarkräfte (wirkend nach AB, AC, AC) = p, q, r, entstehen, so $du = \frac{2g.\ p}{dM}\,dt$, $dv = \frac{2g.\ q}{dM}\,dt$, $dw =$

$\frac{2g.\ r dt}{dM}$ $\left(\frac{dM}{2g.\ dt} = n\right)$. Es folgt: (da $dX = u dt$)

$du = d\vartheta\,(Z \operatorname{Cos}\beta - Y \operatorname{Cos}\gamma) - \vartheta\,(Z\, d\beta \operatorname{Sin}\beta - Y\, d\gamma \operatorname{Sin}\gamma) + \vartheta\vartheta\, dt\,(Y \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + Z \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma - X \operatorname{Sin}^2\alpha)$; $dv = d\vartheta\,(X \operatorname{Cos}\gamma - Z \operatorname{Cos}\alpha) - \vartheta\,(X\, d\gamma \operatorname{Sin}\gamma - Z\, d\alpha \operatorname{Sin}\alpha) + \vartheta\vartheta\, dt\,(X \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + Z \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma - Y \operatorname{Sin}^2\beta)$; $dw = d\vartheta\,(Y \operatorname{Cos}\alpha - X \operatorname{Cos}\beta) - \vartheta\,(Y\, d\alpha \operatorname{Sin}\alpha - X\, d\beta \operatorname{Sin}\beta) + \vartheta\vartheta\, dt\,(X \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma + Y \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma - Z \operatorname{Sin}^2\gamma)$.

§. 105. Da statische Momente durch Elementarkräfte um AB, AC, AD = P, Q, R seyn müssen, so $P = \frac{1}{2g.\ dt}\,(dM\,(Y d\omega - Z dv) + dM'\,(Z' dw' - Z' dv') + \ldots$ $\ldots = \frac{1}{2g\ dt}\,(\operatorname{Cos}\alpha\, d\vartheta \int Y^2 dM - \operatorname{Cos} d\vartheta \int XY dM - \vartheta\, d\alpha \operatorname{Sin}\alpha \int Y^2 dM + \vartheta\, d\beta \operatorname{Sin}\beta \int XY dM + \vartheta^2\, dt \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma \int X dM + \vartheta^2\, dt \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma \int Y^2 dM - \vartheta^2\, dt \operatorname{Sin}^2\gamma \int YZ dM - d\vartheta \operatorname{Cos}\gamma \int XZ dM + d\vartheta \operatorname{Cos}\alpha \int Z^2 dM + \vartheta\, d\gamma \operatorname{Sin}\gamma \int XZ dM - \vartheta\, d\alpha \operatorname{Sin}\alpha \int Z^2 dM - \vartheta^2\, dt \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \int XZ dM - \vartheta^2\, dt \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma \int Z^2 dM + \vartheta^2\, dt \operatorname{Sin}^2\beta \int YZ dM)$, $Q = \frac{1}{2g.\ dt}\,(\text{———})$, $R = \frac{1}{2g.\ dt}\,(\text{———})$. Wird alles beständig auf Hauptaxen AB, AC, AD bezogen, so ist X, Y, Z beständig, also bleiben in du, dv, dw die Glieder weg, wo $\vartheta\vartheta\, dt$ vorkömmt, ferner ist dann (§. 88.) $\int X^2 dM, \int Y^2 dM, \int Z^2 dM = A, B, C$, $B + C = Maa$, $A + C = Mbb$, $A + B = Mcc$, $\int XY dM = \int XZ dM = \int YZ dM = 0$, also $P = \frac{1}{2g.\ dt}\,((B + C)\, d\vartheta \operatorname{Cos}\alpha - (B + C)\, \vartheta\, d\alpha \operatorname{Sin}\alpha)$, $Q = \ldots\ldots$, $R = \ldots\ldots$; oder ($\vartheta \operatorname{Cos}\alpha = x$, $\vartheta \operatorname{Cos}\beta = y$, $\vartheta \operatorname{Cos}\gamma = z$):

I) $\frac{2g\ P\ dt}{Maa} = dx$, II) $\frac{2g\ P\ dt}{Mbb} = dy$, III) $\frac{2g\ R\ dt}{Mcc} = dz$. Lässt sich I, II, III integriren, so sind hieraus und aus $\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$ bekannt $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta$ sich aufs Ende von t, und α, β, γ auf die Hauptaxe beziehen. Nothwendig ist hiezu freilich zu kennen, was für Funktionen von t die statischen Momente P, Q, R seyen.

§. 106. Nun suche absolute Lage der drei Hauptaxen gegen Fixsterne. Beschreibe um Schwerpunkt Kugeloberfläche mit Radius = 1, wo aufeinander senkrechte grösste

Kreise IEL und INL (Taf. XII. Fig. 1.) gegen Fixsterne beständig einerlei Lage behalten. Zu Ende t schneiden die Hauptaxen AB, AC, AD, und die Drehaxe diese fixe Sphäre in A, B, C, und in Q, daher $QA = \alpha$, $QB = \beta$, $QC = \gamma$. Ziehe durch E grösste Kreise durch A, B, C, und nenne $IEA = \lambda$, $EA = l$, $IEB = \mu$, $EB = m$, $IEC = \nu$, $EC = n$, $EAB = \varphi$. Hier $AB = BC = CA = 90°$. Binnen dt beschreiben A, B, C, Bögen $Aa = \vartheta\, dt \operatorname{Sin}\alpha$, $Bb = \vartheta\, dt \operatorname{Sin}\beta$, $Cc = \vartheta\, dt \operatorname{Sin}\gamma$. Lage der Hauptaxen bestimmt durch l, λ, φ, also durch folgende drei Gleichungen:

IV) $dl \operatorname{Sin} l = (\eta \operatorname{Cos} n - z \operatorname{Cos} m)\, dt$ oder $dl = -(y \operatorname{Sin}\varphi + z \operatorname{Cos}\varphi)\, dt$,

V) $d\lambda \operatorname{Sin}^2 l = (y \operatorname{Cos} m + z \operatorname{Cos} n)\, dt$ oder $d\lambda \operatorname{Sin} l = (y \operatorname{Cos}\varphi + z \operatorname{Cos}\varphi)\, dt$,

VI) $\frac{d\varphi}{dt} = x - y \operatorname{Cot} l. \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Cot} l. \operatorname{Sin}\varphi$.

§. 107. Planet, dessen Mittelpunkt in V, (Taf. XII. Fig. 2.) der als gleich dicht sphärisch angenommen werden darf, dessen Gewicht = V (an Erdoberfläche gewogen, und Gewicht der Erde = 1 gesetzt) störe einzig und allein die Rotation des Planeten, dessen Schwerpunkt in I, dessen Hauptaxe IA, IB, IC, dessen Gewicht = M. Zu Ende Zeit t sey $IV = v$, und bilde IV mit IA, IB, IC die Winkel ζ, η, ϑ, so bewegende Kräfte von dM nach IA, IB, IC, oder p, q, $r = \frac{V dm\, (v \operatorname{Cos}\zeta - X)}{Z v^3}$, $\frac{V dm\, (v \operatorname{Cos}\eta - Y)}{Z v^3}$, $\frac{V dM\, (v \operatorname{Cos}\vartheta - Z)}{Z v^3}$, also da $ZV^2 = v^2 = 2v\, (X \operatorname{Cos}\zeta + Y \operatorname{Cos}\eta + Z \operatorname{Cos}\vartheta) + X^2 + Y^2 + Z^2$, worin X, Y, Z gegen v sehr klein sind, statisches Moment um IA, IB, IC, nemlich P, Q, $R = \frac{3 MV\, (c^2 - b^2)}{v^3} \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Cos}\vartheta$, $\frac{3 MV\, (a^2 - c^2)}{v^3} \operatorname{Cos}\zeta \operatorname{Cos}\vartheta$, $\frac{3 MV\, (b^2 - a^2)}{v^3} \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Cos}\zeta$. Hätte zugleich V, V′, V″, ... den Planeten in seiner Rotation gestört, so wäre

$$P = 3M\, (c^2 - b^2) \left(\frac{V}{v^3} \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Cos}\vartheta + \frac{V'}{v'^3} \operatorname{Cos}\eta' \operatorname{Cos}\vartheta' + \frac{V''}{v''^3} \operatorname{Cos}\eta'' \operatorname{Cos}\vartheta'' + \ldots \right)$$

u. s. w. Nach (§. 105. und 106.) bestehen also im Falle der gestörten Rotation des Planeten blos durch V, V′, V″, ... folgende 6 Gleichungen (nebst jener $\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$):

I) $dx - 6g \left(\frac{c^2 - b^2}{a^2} \right) \left(\frac{V}{v^3} \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Cos}\vartheta + \frac{V'}{v'^3} \operatorname{Cos}\eta' \operatorname{Cos}\vartheta' + \ldots \right) dt = 0$

$$\text{II)}\ dy - 6g\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2}\right)\left(\frac{V}{v^3}\ \mathrm{Cos}\,\zeta\ \mathrm{Cos}\,\vartheta + \frac{V'}{v'^3}\ \mathrm{Cos}\,\zeta'\ \mathrm{Cos}\,\vartheta' + \ldots\ldots\right)dt = o$$

$$\text{III)}\ dz - 6g\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)\left(\frac{V}{v^3}\ \mathrm{Cos}\,\eta\ \mathrm{Cos}\,\zeta + \frac{V'}{v'^3}\ \mathrm{Cos}\,\eta'\ \mathrm{Cos}\,\zeta' + \ldots\right) dt = o,$$

IV) $dt + (y\ \mathrm{Sin}\,\varphi + z\ \mathrm{Cos}\,\varphi)\ dt = o,$

V) $d\lambda\ \mathrm{Sin}\,l - (y\ \mathrm{Cos}\,\varphi - z\ \mathrm{Sin}\,\varphi)\ dt = o,$

VI) $d\varphi - xdt + \mathrm{Cot}\,l\ (y\ \mathrm{Cos}\,\varphi - z\ \mathrm{Sin}\,\varphi)\ dt = o.$

Ist $a = b = c$ (wie bei gleich dichter Kugel) so $\varrho\ \mathrm{Cos}\,\alpha$, $\varrho\ \mathrm{Cos}\,\beta$, $\varrho\ \mathrm{Cos}\,\gamma$ beständig, also ϱ, α, β, γ beständig.

Fünftes Kapitel.

Schwanken des Mondes.

§. 108. Perturbation der Mondrotation zwar allen Himmelskörpern zugeschrieben, aber merklich nur der Erde. (Kehrt der Erde beständig einerlei Seite zu.) Pendelmässige Schwankungen um Rotationsaxe (die auf Mondbahn fast ⊥ steht) mechanisches Schwanken, scheinbare Schwankungen wegen ungleichförmiger Bewegung, in Bahn optisches Schwanken.

§. 109. Aus Beobachtungen bekannt: Mondesrotationsaxe IA (Taf. XII. Fig. 3.) beständig dieselbe (also IA Hauptaxe (§. 92.)), Mondcentrum läuft um Erdcentrum in Ebene, worin die zwei andern Monds-Hauptaxen IB, IC liegen. Resultat aus Gleichungen I VI. (§. 107.) hängt davon ab, was v, ζ, η, ϑ für Funktionen von t (bei gegebenen V) sind, also hier einerlei Rotationsstörungen, ob Mondcentrum um fixes Erdcentrum oder laufe, wenn nur in beiden Fällen einerlei Bahn, einerlei Winkelbewegung in Ebene EBEDE. Hieraus und aus (Theorische Astronomie) Mittelpunktsgleichung, wahrer und mittlerer Anomalie folgt:

$\vartheta = \delta + A.\ \alpha.\ \mathrm{Cos}\ At - \frac{d\eta}{dt}$, dann I. $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{3.\ g.\ V\ (c^2 - b^2)\ \mathrm{Sin}^2\,\eta}{a^2.\ v^3}$; [worin $V = 1$] $= n\ (1 + \beta.\ \mathrm{Cos}\ A.\ t)\ \mathrm{Sin}\ 2\eta$, II. $\frac{dd\eta}{dt^2} + AA\alpha.\ \mathrm{Sin}\ At + n \times (1 + \beta.\ \mathrm{Cos}\ At)\ \mathrm{Sin}\ 2\eta = o$, worin t von Auslaufen aus Erdferne an gemessen dann $n = \frac{3g\ (c^2 - b^2)}{a^2.\ e^3}$, $\beta = \frac{3\gamma}{e}$; Hier ist η = BIV [zu Ende t], $A = \delta$ mittlere Winkelbewegung in grossen Halbaxen der Bahn und in Erdhalbmessern ausgedrückt, e

grosse Halbaxe in Erdhalbmesser (a, b, c) so gross, dass $a^2 M$, $b^2 M$, $c^2 M$ Trägheitsmomente um IA, IB, IC, wenn M Gewicht des Mondes (an Erdoberfläche gewogen, Erdmasse = 1 gesetzt.)

§. 110. Um mechanisches Schwanken zu bestimmen, denke man sich Mondcentrum I unbeweglich, Erdcentrum V im Kreise gleichförmig um I laufend u. s. w., so dass $\alpha, \beta, \gamma = 0$ (§. 109.). Daher II) $0 = \frac{ddy}{dt^2} + n. \operatorname{Sin} 2\eta$, III) $\vartheta = \delta - \frac{d\eta}{dt}$. Folgt aus II) $\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{m + n \operatorname{Cos}^2 \eta}$, daher Schwanken um so schneller je kleiner η, d. h. je näher B und V einander sind. Ferner grösster positiver und negativer Werth H von $\eta = \frac{1}{2} \operatorname{Arc. Cos} \left(-\frac{m}{n}\right)$, also m nur sehr wenig kleiner als n, dann m und n von entgegengesetzten Zeichen, endlich Schwanken der Hauptaxe IB um IA rechts und links von IV in kleinen Bögen, und zwar beständig auf einerlei Art. Hiernach gibt approximative III) die Gleichung $\vartheta = \delta \pm \sqrt{m + n} = \delta$. Es ist $H = \pm \sqrt{\frac{m+n}{2n}}$, da $\operatorname{Cos} 2H = 1 - 2H^2 = -\frac{m}{n}$, daher m = —, n = +. Aus $\frac{d\eta}{dt} = \ldots\ldots$ folgt $t = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\operatorname{Arc. Sin} \left(4 \sqrt{\frac{2n}{m+n}}\right) \pm i. \pi\right)$ und $\eta = \sqrt{\frac{m+n}{2n}} \cdot \operatorname{Sin} (t \sqrt{2n} \pm i. \pi)$, worin $i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ wenn t von da an gezählt wird, wo IB und IV einander decken. Zeit t einer Schwankung von V aus bis zur grössten Digression $= \frac{\pi}{2\sqrt{2n}}$, daher ganze Librationsperiode $4t = \frac{2\pi. a. e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6g(c^2 - b^2)}}$. Periodischer Monat $T = \frac{e.^{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{2}}{\sqrt{g}}$ (§. 38.), also $4t = \frac{a. T}{\sqrt{3}(c^2 - b^2)}$, aus Beobachtungen = T. Da n = +, oder $c > b$, so Hauptaxe IB > als jene IC, welche erstere dem geocentrischen Mondbeobachter beständig zugekehrt, und in kleinen Bögen um IA rechts und links von IV schwingt, wo IV die in jedem Augenblicke vom Mondcentro zum Erdcentro gezogene Gerade.

§. 111. (§. 109. II.) gibt, da approximative Sin $2\eta = 2\eta$, II, $\frac{dd\eta}{dt^2} + A^2\alpha \text{ Sin At}$ $+ 2n\eta(1 + \beta. \text{ Cos At}) = 0$, woraus $\eta = h \text{ Sin At} + k \text{ Sin } 2\text{At} = \frac{A\alpha^2. \text{ Sin At}}{A^2 - 2n}$ $+ \frac{n\beta \text{ h Sin } 2\text{At}}{4A^2 - 2n} = \frac{A^2\alpha. \text{ Sin At}}{A^2 - 2n}$, daher (§. 109.) $\varepsilon = \delta - \frac{2n\, A\alpha. \text{ Cos At}}{A^2 - 2n}$, worin t vom Auslaufmomente aus Erdferne an gemessen; daher ε am grössten und kleinsten in Erdnähe und Erdferne, und nie = o. Heisst φ Mittelpunktsgleichung des Mondes, so $\eta = \frac{A^2}{A^2 - 2n}\varphi$, und da aus Beobachtungen $\eta > \varphi$, an Erde jeder Zeit t, so n = +, wie schon (§. 110.) gezeigt worden. Hauptaxe in IA und IC gleich gross, jene in IB zu jener in IC = 1 : 0,9999764 nach *La Grange.*

Sechstes Kapitel.

Störung der Erdrotation durch Sonne und Mond.

§. 112. Die Rotation der Erde ist immer sehr nahe gleichförmig, und kann sich nur dann ändern, wenn ihre Umdrehungsaxe nach und nach durch andere Punkte der Erdoberfläche durchgeht, oder wenn sich die Polhöhe der Oerter auf der Erde ändert, nicht aber wenn blos die Lage der Weltkörper an der Himmelskugel sich ändert. Schwankt also die Erdaxe und der Pol der Ekliptik, so wird die Gleichförmigkeit der Rotation dadurch nicht gestört.

§. 113. bis 119. Die Schiefe der Ekliptik ist am grössten, wenn die Länge der Sonne und des Mondes = 0° oder = 180°, und die Länge des Knotens der Mondbahn = o ist (alle Längen werden wie gewöhnlich vom veränderlichen Frühlingspunkt gezählt); am kleinsten aber, wenn Länge der Sonne und des Mondes = 90° oder 270°, und die Länge des Knotens = 180° ist. Der Unterschied dieser grössten und kleinsten Schiefe der Ekliptik ist das, was man die Nutation nennt, und die von Bradley zu 18″ beobachtet worden ist.

§. 120. Aus der Nutation findet man, wenn man dieselbe zu 18″ oder 18″, 5 oder zu 19″ annimmt, das Verhältniss der Masse des Mondes zu der der Erde = $\frac{1}{115}$ oder $\frac{1}{103}$ oder $\frac{1}{94}$, Bernoully und D'Alembert fanden dasselbe aus Beobachtungen sehr nahe = $\frac{1}{91}$. Hiernach würde sich die Kraft der Sonne in Absicht auf das Zurückwei-

chen der Aequinoktialpunkte zur Kraft des Mondes fast wie 1 : 2 verhalten. Von den beobachteten 50″ kommen also 33″ auf Rechnung des Mondes.

Ausser der Sekular-Abnahme der Schiefe der Ekliptik von $\frac{1}{2}'$ macht die Erdaxe in jeder Periode von 18 Jahren eine Schwankung hin und her von 19″, und die Aequinoktialpunkte weichen jährlich um 50″, 3 zurück, schwanken aber ausserdem alle 18 Jahre einmal hin und her. Der positive und negative Werth (grösste) dieser Libration beträgt 18″, mithin die ganze Schwankung 36″, welches die Gleichung des Aequinoktialpunktes heisst.

§. 121. Die eigentliche Rotation der Erde in Absicht auf Fixsterne bleibt ungeachtet der Perturbation der Sonne und des Mondes, doch immer gleichförmig. Von diesem hat sich auch Bouguer durch die Länge (unveränderlich) des Sekundenpendels überzeugt.

Auch ergibt sich aus der §. 120. angegebenen Nutation zu 19″, die Abplattung der Erde, oder das Verhältniss der kleinen zur grossen Axe $= 0{,}99646$. In der Voraussetzung aber, dass die Masse in der Erdkugel gleichförmig vertheilt sey, fand es Newton, durch die Beobachtungen im folgenden Kapitel $= 0{,}996$.

Siebentes Kapitel.

Figur der Erde.

§. 122. und 123. Beobachtungen zeigen, dass die Erde sehr nahe sphärisch sey. Es entsteht daher die Frage, die Ursache dieser regelmässigen Gestalt zu ergründen. Diese kann kein Ungefähr, sondern sie muss physisch oder mechanisch seyn. Weil der grösste Theil der Erdfläche flüssig und in Ruhe, weil ferner das feste Land über die Meeresfläche nicht viel erhaben und die Tiefe des Meeres nicht beträchtlich ist, so muss man annehmen, dass die Erde die Gestalt hat, die zum Gleichgewicht nöthig ist, wenn sie ganz flüssig wäre. Hiezu ist nöthig, 1) dass alle unendlich dünnen Röhren, die man sich von der Oberfläche zum Mittelpunkte der Erde denken kann, gleich schwer seyen, und 2) dass die Richtung der Schwere in jedem Punkt auf der Erdfläche senkrecht sey. Durch diese zwei Grundsätze muss demnach die Figur der Erde theoretisch untersucht werden.

Weil man ins Innere der Erde nicht gelangen kann, so muss man eine Hypothese annehmen, nach welcher die Dichtigkeit der Erde gegen den Mittelpunkt zunimmt, da der erste Grundsatz ihre Kenntniss voraussetzt, und da ist es am einfachsten, die Erde gleich dicht anzunehmen. Hieraus folgt, dass sie in Ruhe eine sphärische Gestalt annehmen würde, in Bewegung aber, wegen den Schwungkräften eine Gestalt annehmen muss, bei welcher die Parallelen Kreise, die Meridiane aber ähnliche Linien sind. (Dasselbe folgt auch aus der allgemeinen Gravitation.) Jene ähnlichen Linien müssen gegen den Aequator erhoben, gegen die Pole aber eingedrückt seyn. Das folgende enthält die Newtonische Untersuchung der Frage, ob diese Linien Ellipsen sind.

§. 124. Der Durchschnitt eines elliptischen Sphäroids mit jeder Ebene ist eine Ellipse, und alle parallelen Durchschnitte geben ähnliche Ellipsen.

§. 125. Zwei körperliche Punkte, die auf der Oberfläche zwei ähnlicher Körper eine ähnliche Lage haben, werden von diesen Körpern mit Kräften angezogen, die sich wie ihre Entfernungen vom Mittelpunkt, oder wie die Durchmesser der Körper verhalten.

§. 126. Zwei körperliche Punkte in demselben Durchmesser eines elliptischen Sphäroids werden vom ganzen Sphäroid mit Kräften angezogen, die sich wie die Entfernung dieser Punkte vom Mittelpunkt verhalten.

§. 127. Das Gleichgewicht kann beim elliptischen Sphäroid nur dann Statt haben, wenn alle Punkte auf der Oberfläche nach dem Mittelpunkt von Kräften gezogen werden, die sich verkehrt wie ihre Entfernungen vom Mittelpunkt oder wie die Halbmesser des Sphäroids verhalten.

§. 128. 129. 130. Im elliptischen Sphäroid ist die mittlere Richtung der Schwere in jedem Punkt auf der Oberfläche senkrecht, und die Schwere wächst auf demselben vom Aequator nach dem Pol beinahe wie die Quadrate der Sinus der doppelten Breiten. Die Richtungen der Schwere sind bei allen Punkten in demselben Halbmesser parallel, und die Schwere verhält sich wie die Entfernung vom Mittelpunkt.

§. 131. Im elliptischen Sphäroid drücken alle Röhren von jedem Punkt der Oberfläche bis zum Mittelpunkte mit gleicher Stärke. Die §. 123. genannten Linien sind also Ellipsen. Es bleibt noch übrig das Verhältniss ihrer Axen oder das Verhältniss der Schwere P : A unter Pol und Aequator zu untersuchen.

§. 132. 133. Wenn die grosse Axe eines elliptischen Sphäroids = m, die kleine = n ist, so ist die Attraktion des ganzen Sphäroids

$$P = \frac{4\pi\, m^2\, n}{m^2 - n^2}\left(1 \frac{n}{\sqrt{(m^2 - n^2)}} \text{ Arc. tang } \frac{\sqrt{(m^2 - n^2)}}{n}\right).$$

Für m = n wird

$$P = \frac{m}{n^2} \text{ wo } M = \frac{4}{3}\pi\, m^3$$

dem kubischen Inhalt der Kugel gleich ist. Die Anziehung ist also gerade so, wie wenn M im Mittelpunkt vereinigt wäre.

§. 134. 135. 156. Aber

$$= \frac{2\, m^3\, \pi}{(m^2 - n^2)^{\frac{3}{2}}}\left(n \text{ Arc. tang } \frac{\sqrt{(m^2 - n^2)}}{n} - \frac{n^2\sqrt{(m^2 - n^2)}}{m^2}\right).$$

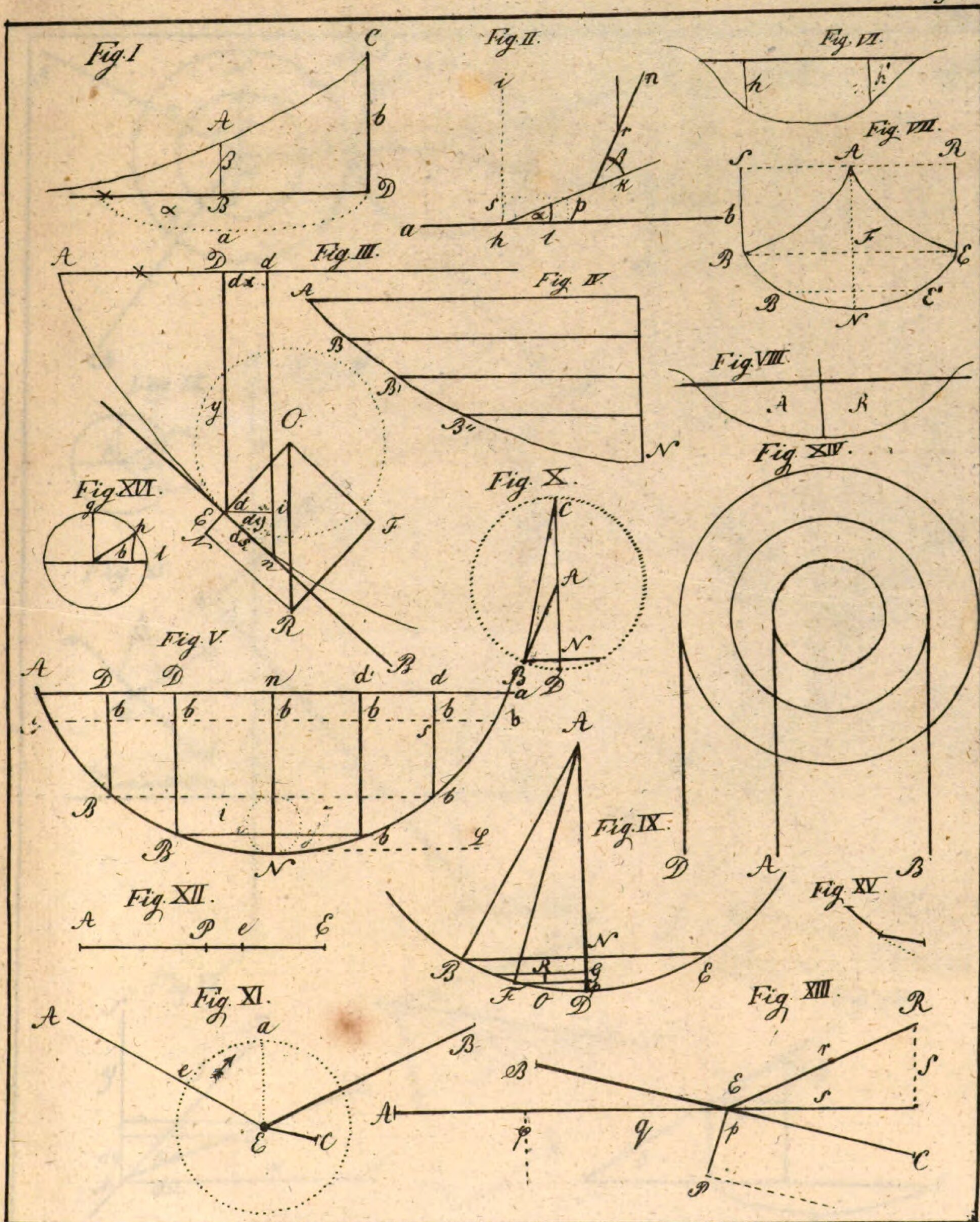
§. 137. Wegen der Schwungkraft wird A zu $\frac{290}{291}$ A; also m : n = 291 P : 290 A.

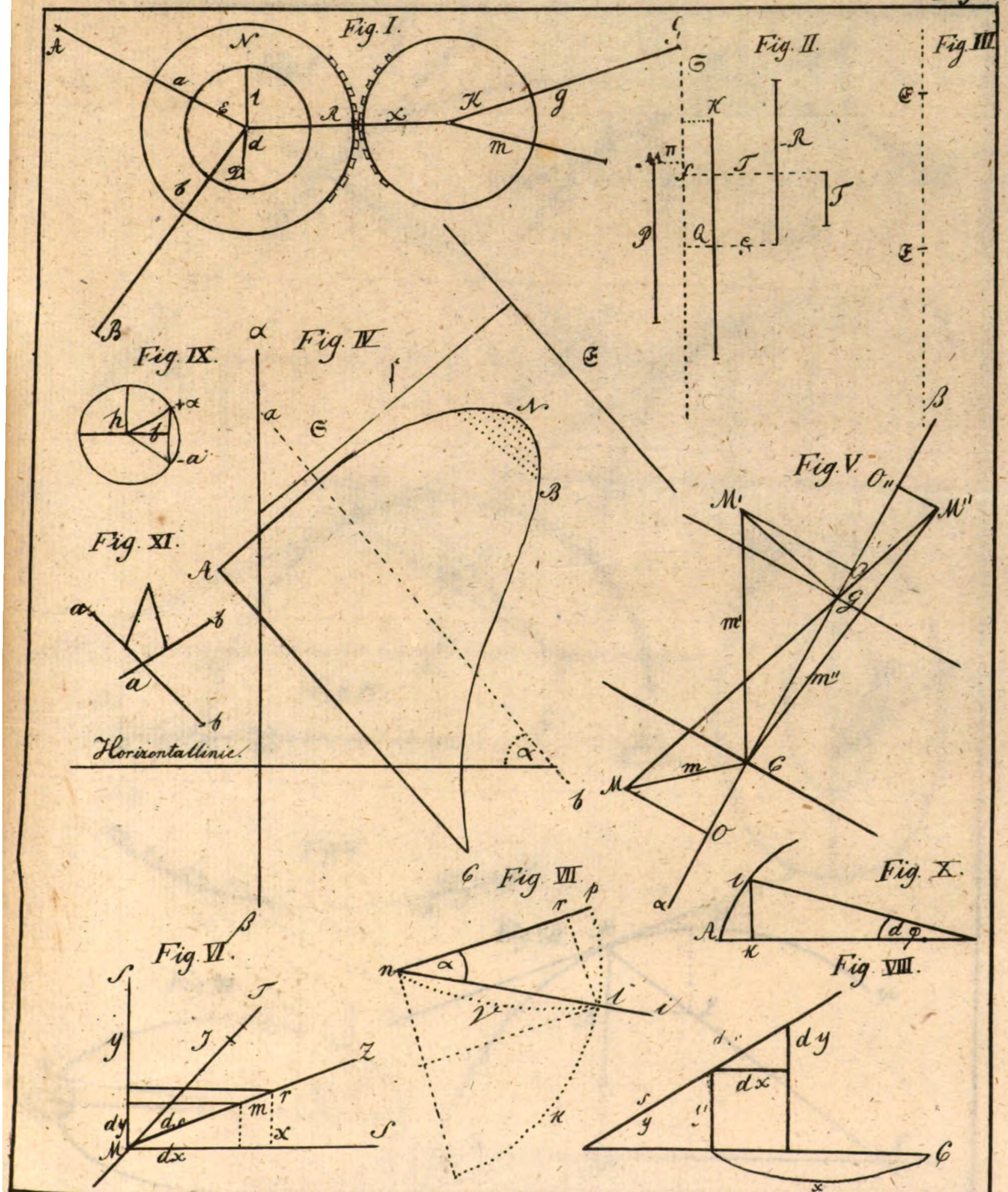
§. 138. Nach Bouguer ist m : n = 231 : 230, und nach Newton = 230 : 229.

§. 139. Aus den Pendellängen unterm Aequator und Pol hat Bouguer gefunden m : n = 172 : 171. Graham und Condamine aber m : n = 182 : 181. Die Pendellängen und Gradmessungen geben also eine grössere Abplattung; neuere Messungen aber eine kleinere.

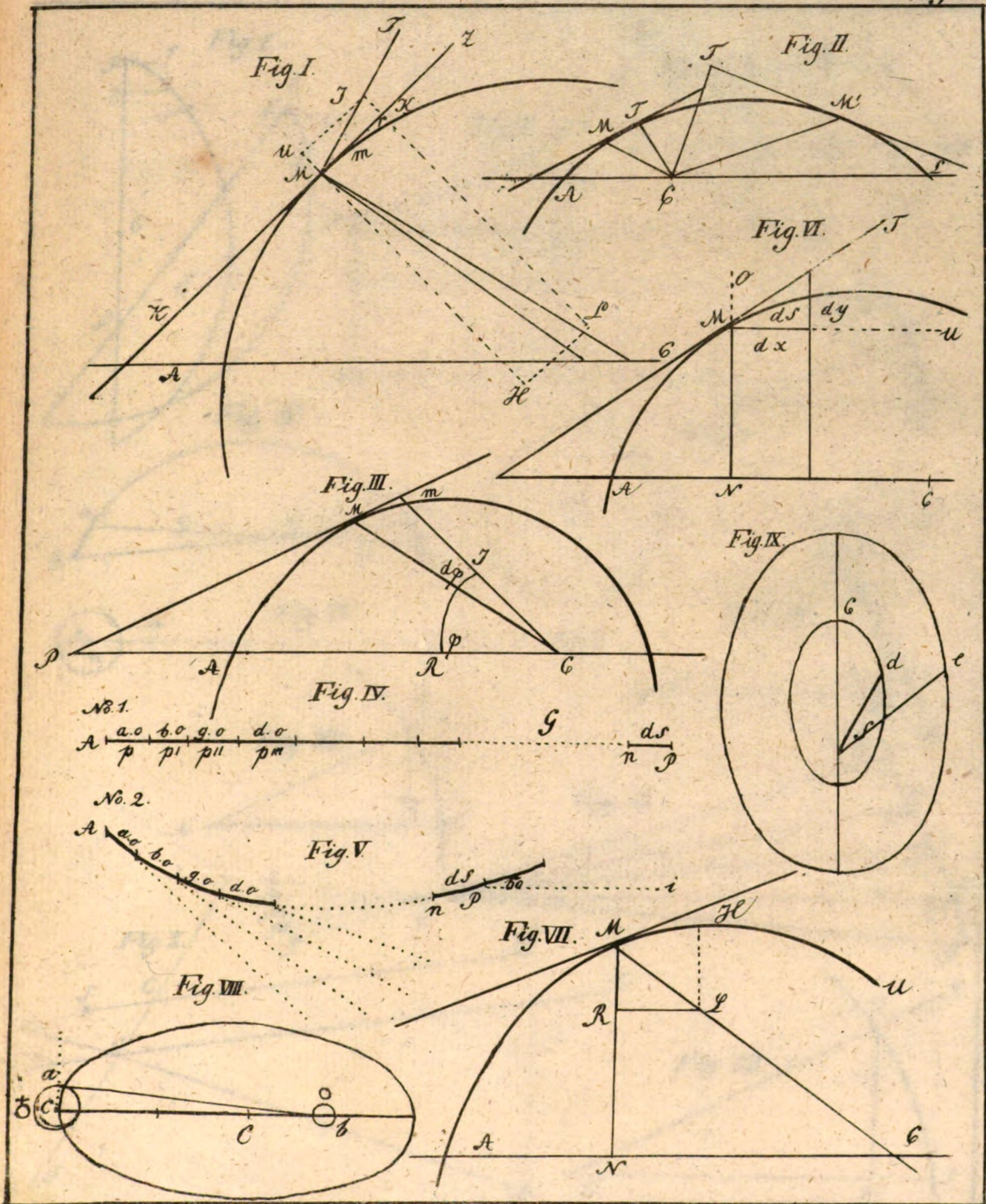
§. 140. Bestimmung der Figur der Weltkörper die mit Trabanten umgeben sind, und deren Rotation bekannt ist. Beim Jupiter ist m : n = 10 : 9, bei der Sonne = 38555 : 38554.

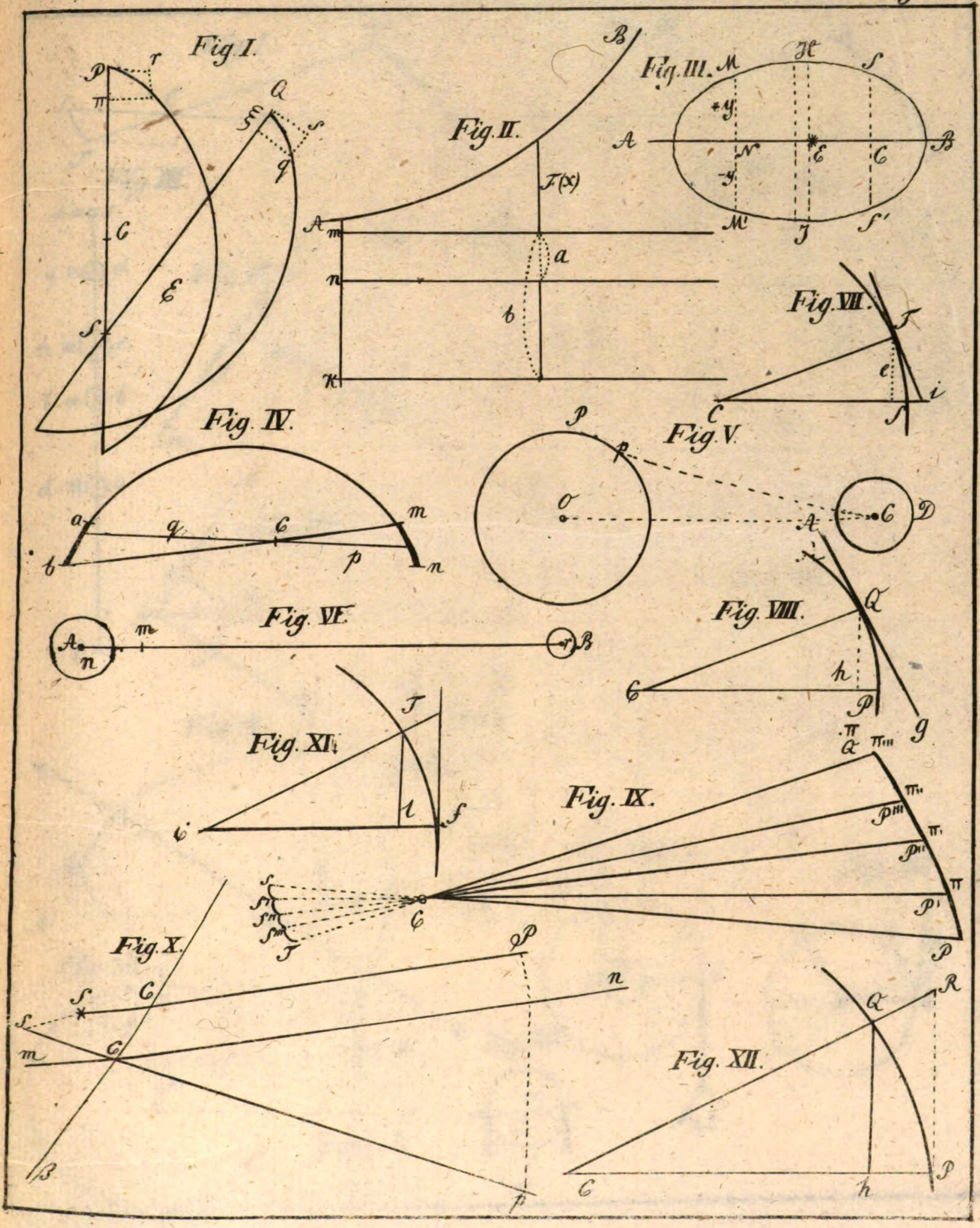
Die Abplattung verhält sich auch sehr nahe verkehrt wie die Dichtigkeit und das Quadrat der Rotationszeit. Auf diese Art findet Newton beim Jupiter m : n = 10, 4 : 9, 4. Umgekehrt kann man die Rotationszeit finden, wenn man die Abplattung und Dichtigkeit kennt. So ist beim Saturn die Rotationszeit = 10 Stunden 58 Minuten sehr übereinstimmend mit Herschels Beobachtungen.

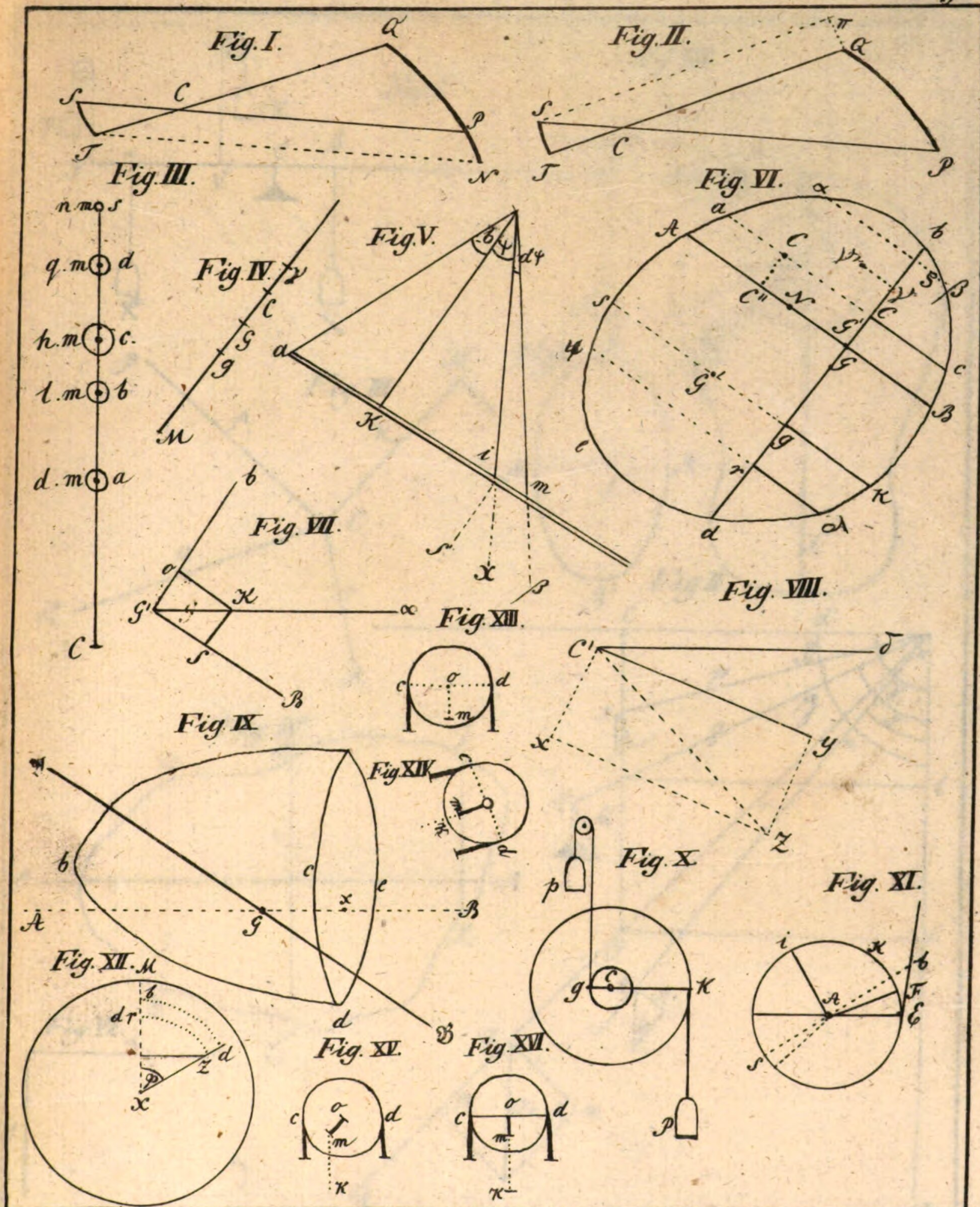

Fig. I
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.

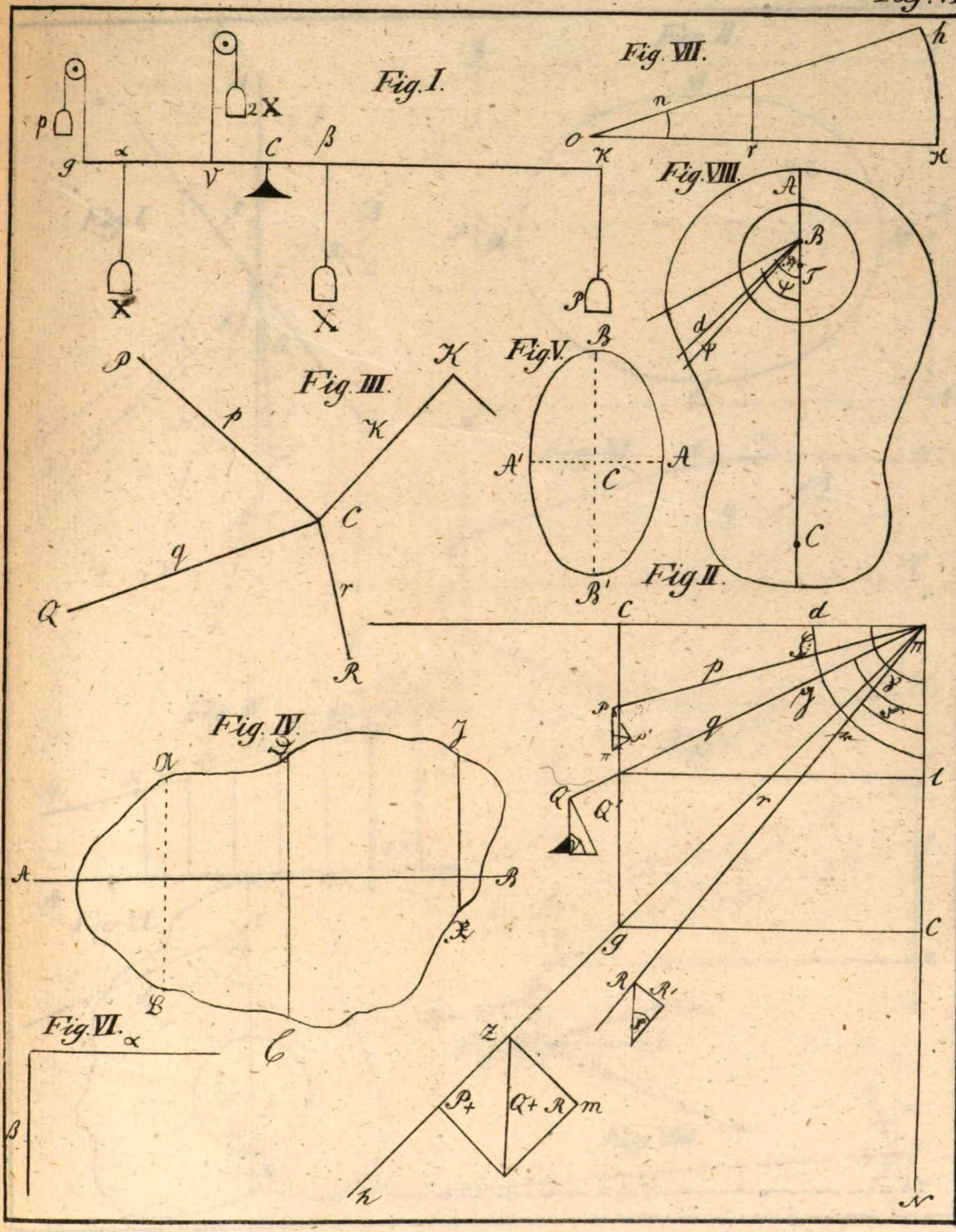

Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Horizontallinie.

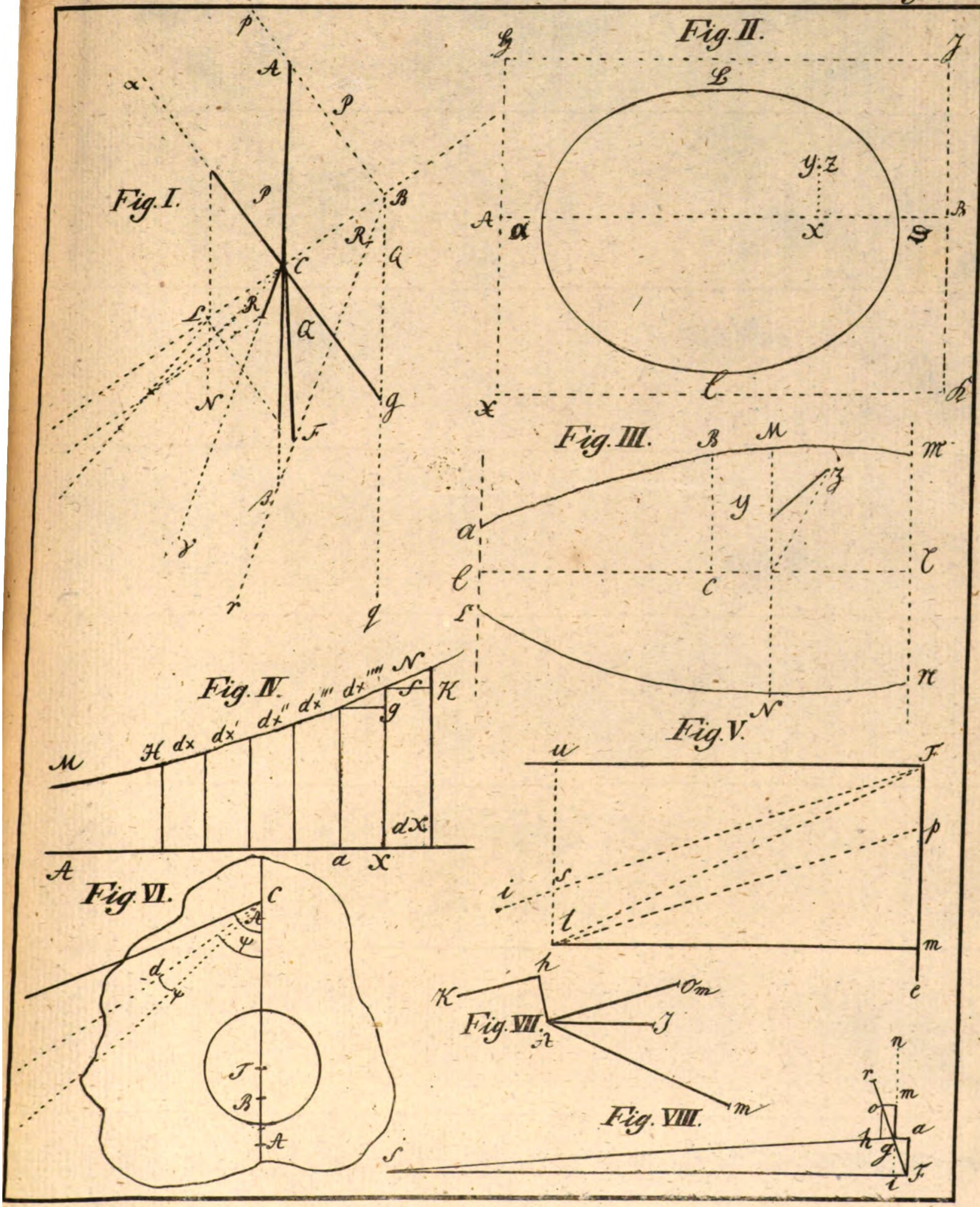
Taf. III.

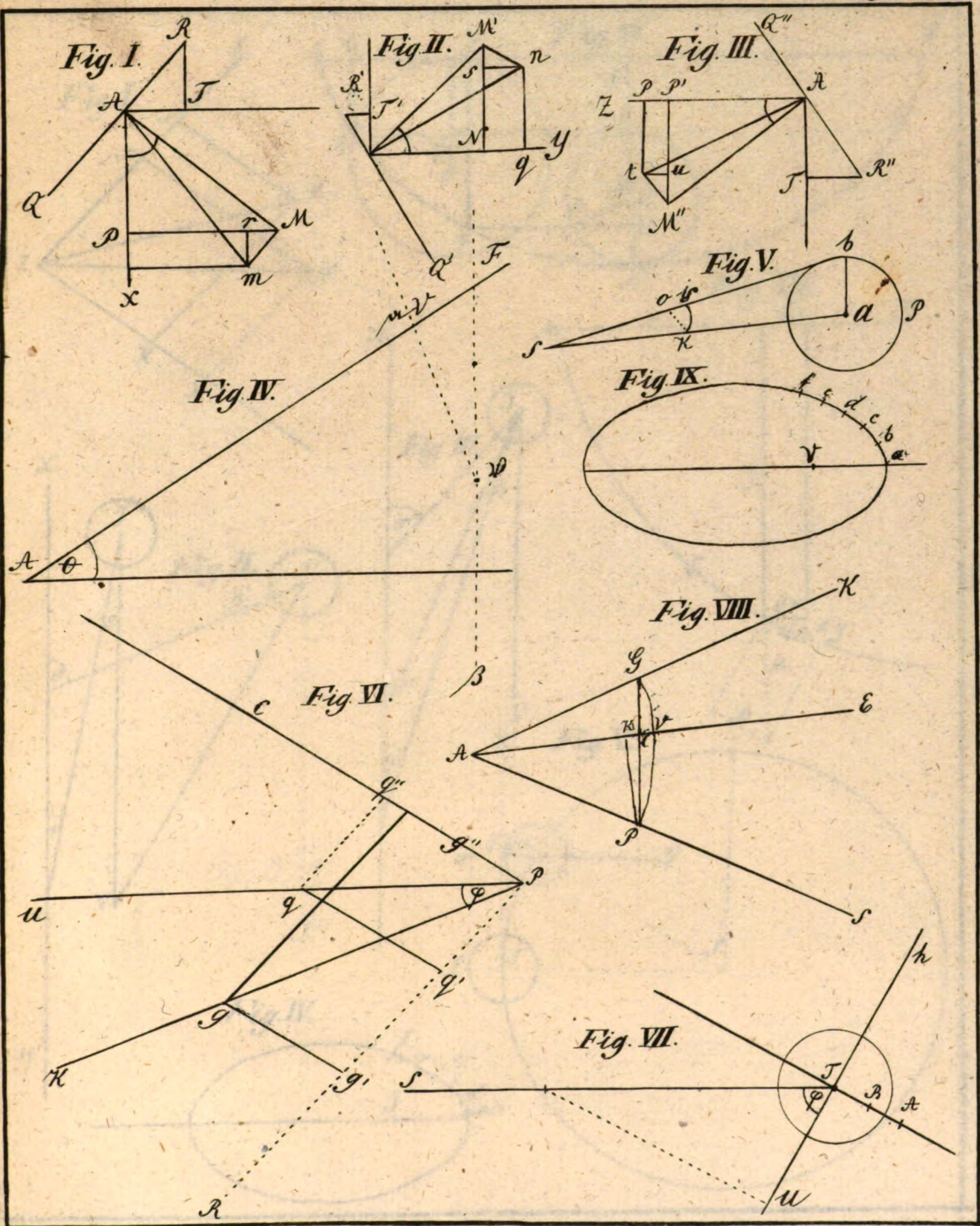

Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
No. 1.
No. 2.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
dx
dy
ds
dφ
φ
a.o
b.o
g.o
d.o
p
p'
p''
p'''


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.

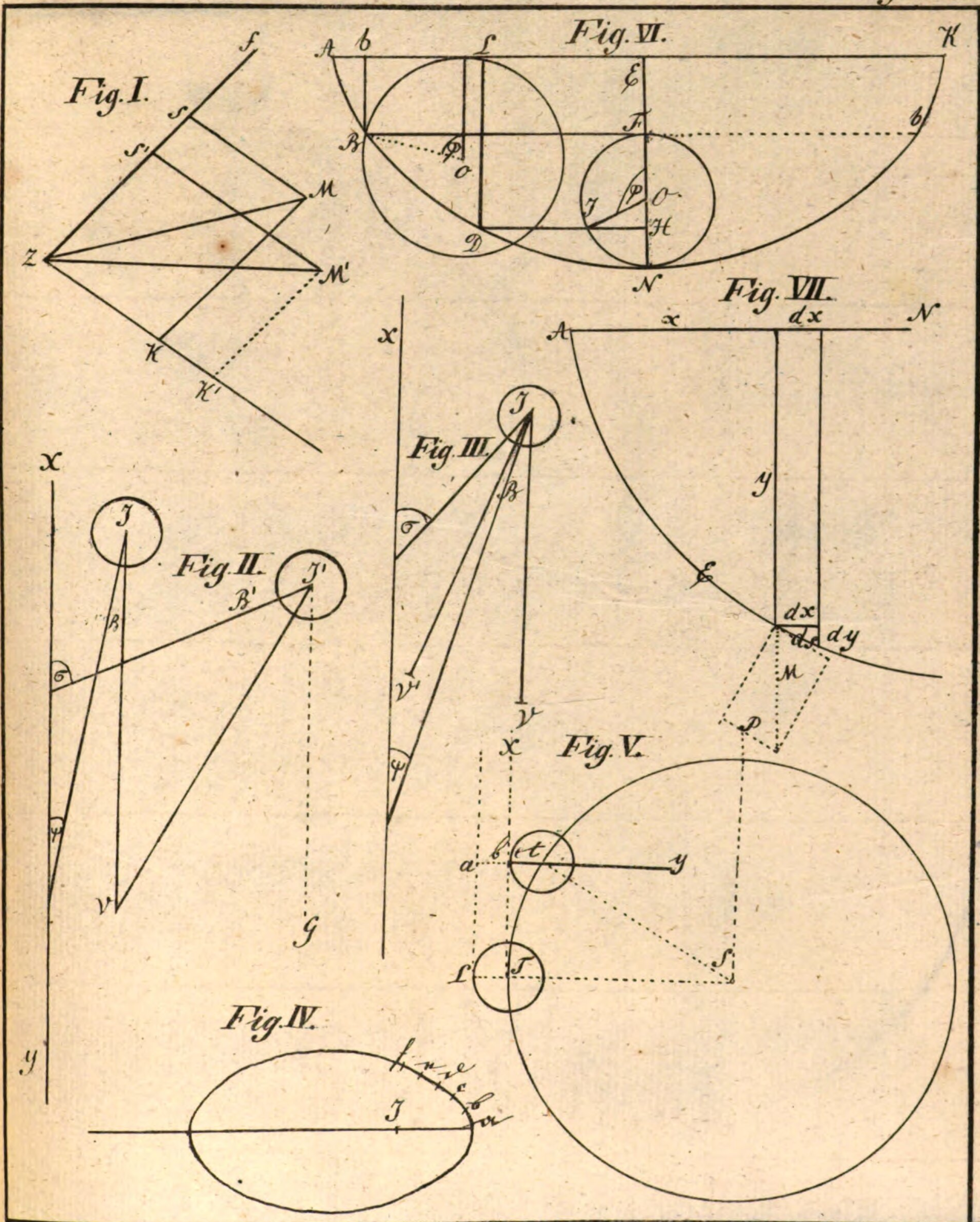

Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.

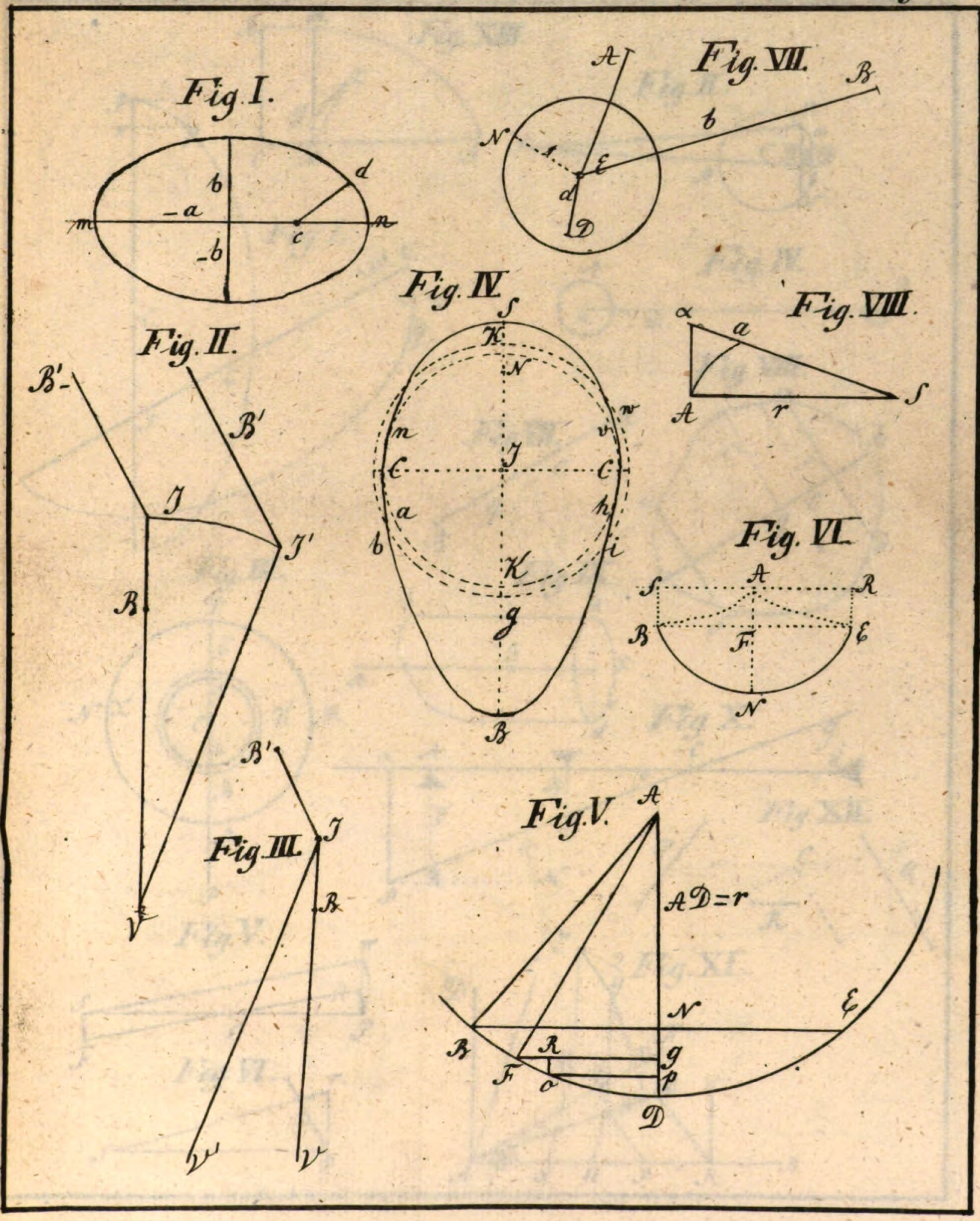

Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
P+
Q+R

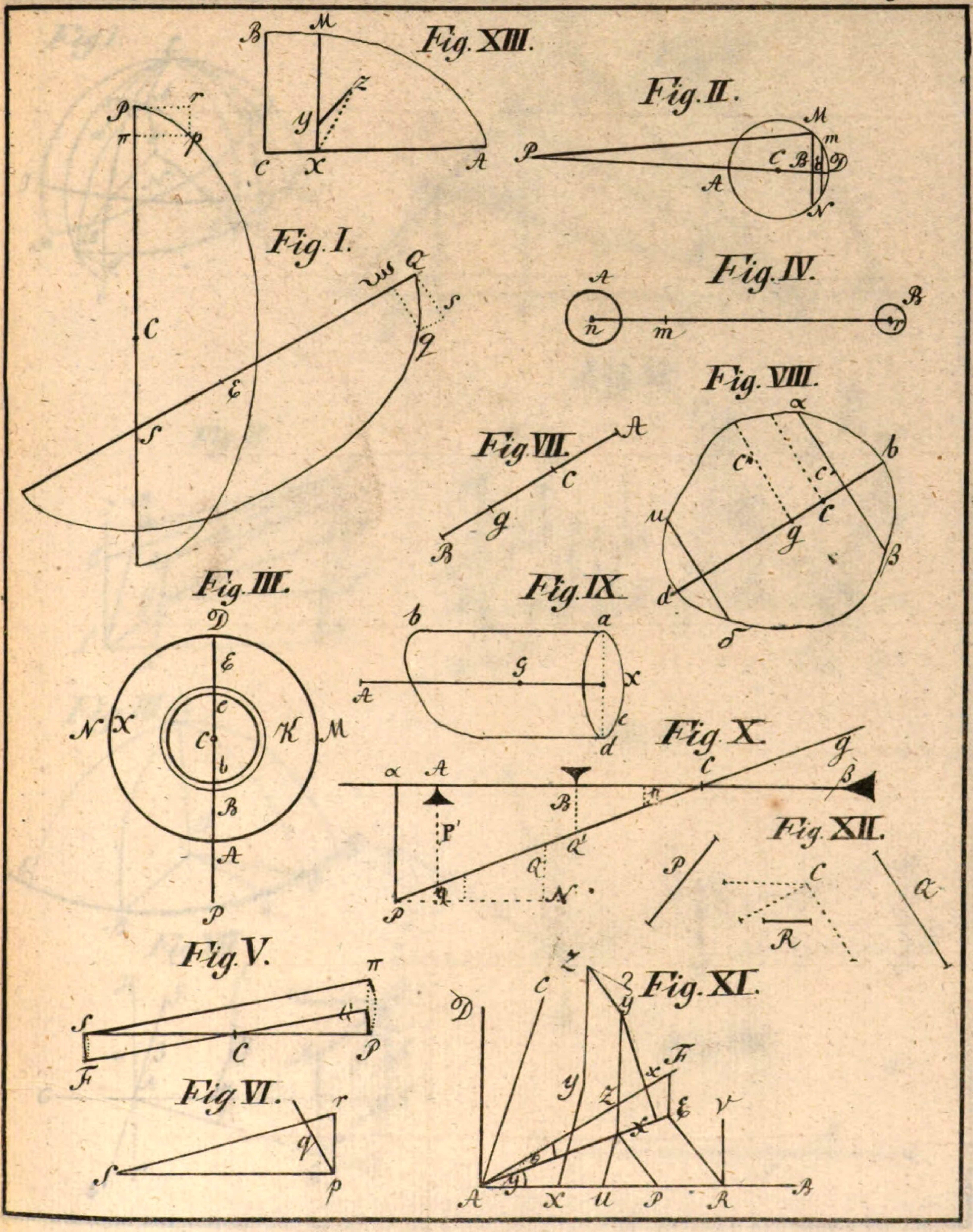

Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.

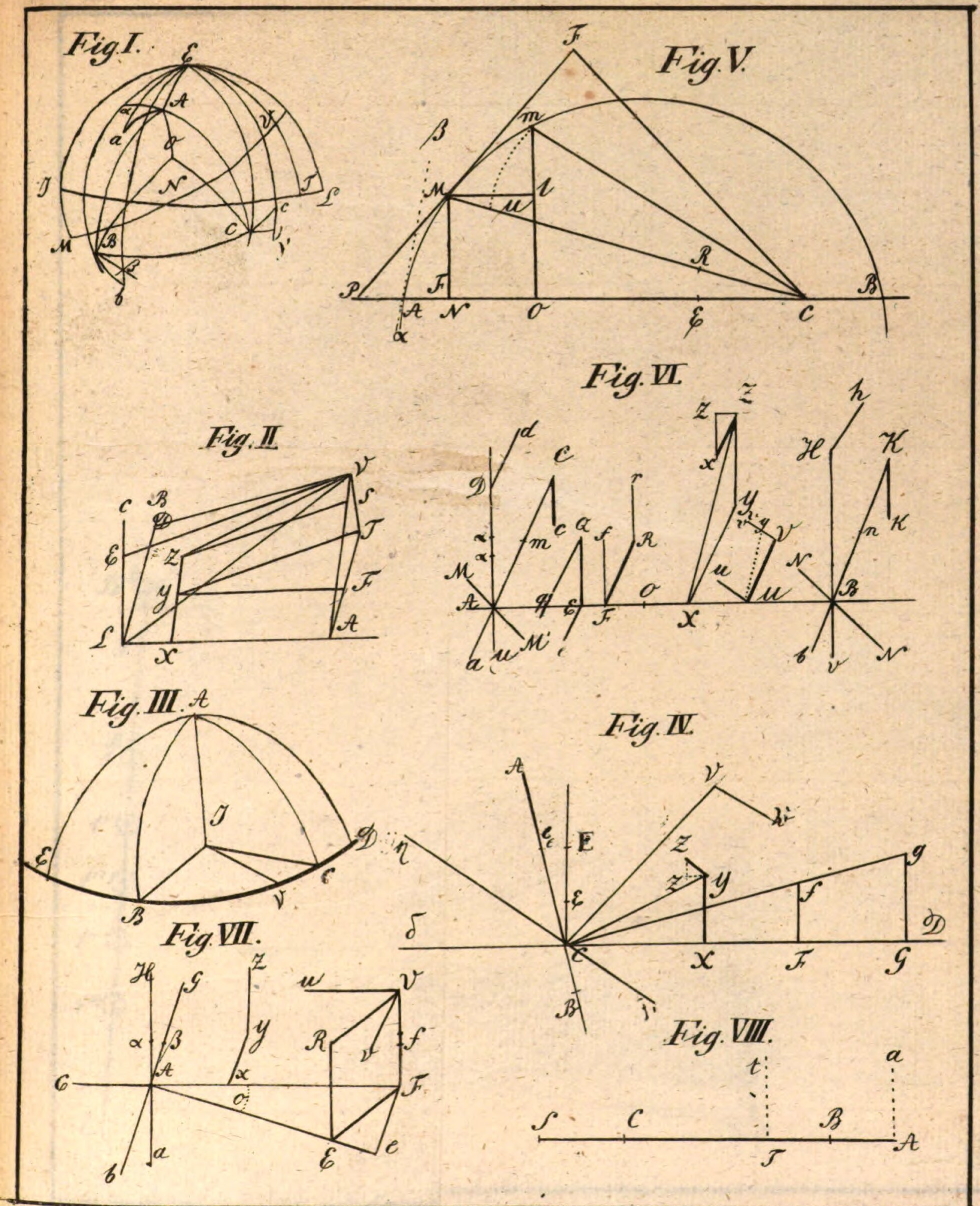

Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.

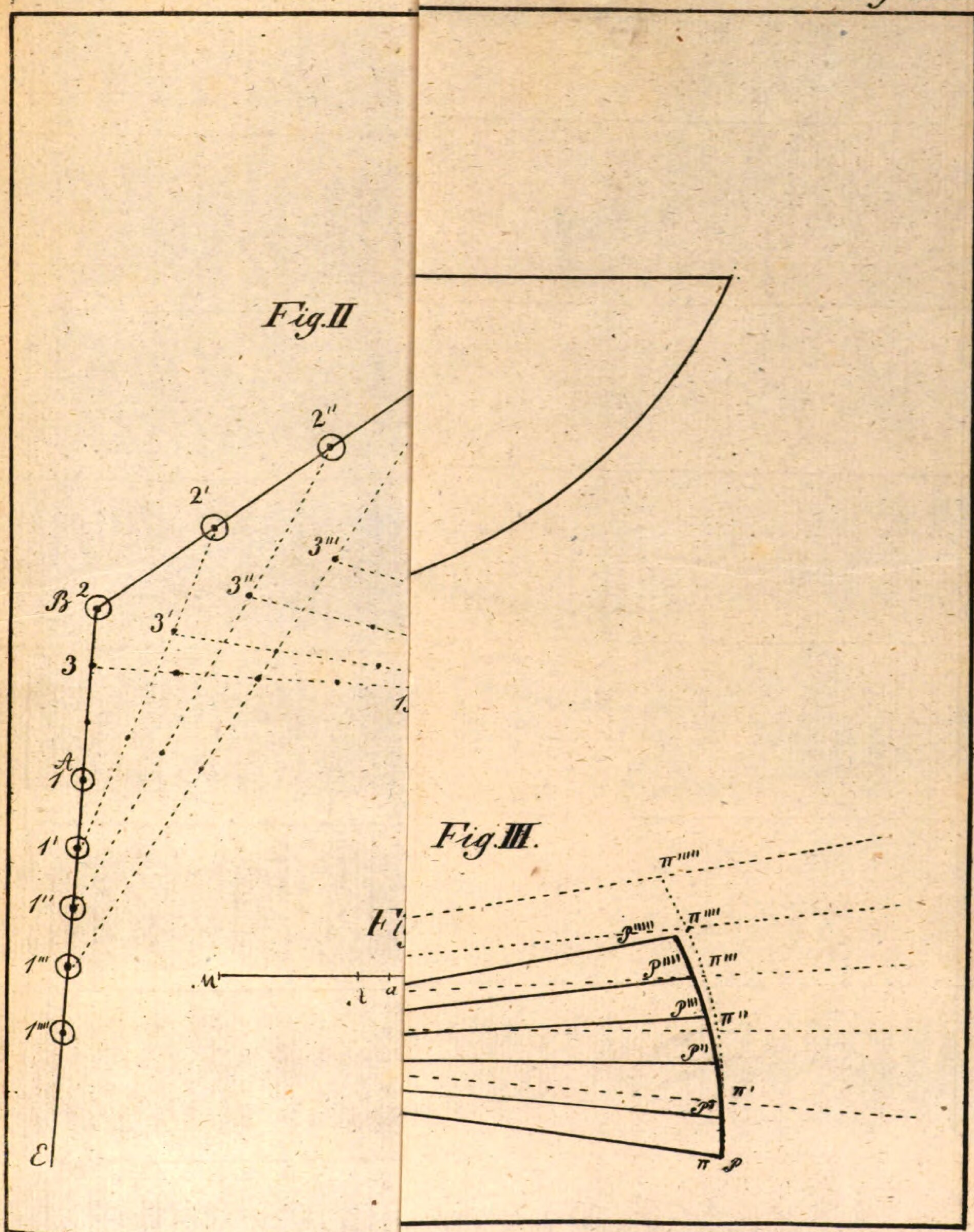
Taf. IX.




Fig. I.
Fig. VII.
Fig. IV.
Fig. VIII.
Fig. II.
Fig. VI.
Fig. V.
Fig. III.
AD = r


Fig. XIII.
Fig. II.
Fig. I.
Fig. IV.
Fig. VIII.
Fig. VII.
Fig. III.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XII.
Fig. V.
Fig. XI.
Fig. VI.


Fig. I.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. VII.
Fig. VIII.


Fig. II
Fig. III
B 2
2'
2''
3'''
3''
3'
3
A
1
1'
1''
1'''
1''''
E
M
t
a
P
π

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Buquoy, Georg <<von>>,

Erläuterungen und Zusätze zu dem dritten Theile von Herrn Schuberts theoretischer Astronomie nemlich zu dessen physischer Astronomie nebst einem angehängten Auszuge aus diesem Werke und den Zusätzen, worin der Geist der Rechnung strenge beobachtet ist. Zum fasslichen
Bd.: 1

Leipzig (1811)

4 Astr.u. 33-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10049324-9